Modello Standard e possibili estensioni

Riccardo Di Sipio

11 dicembre 2005

Sommario

In questo articolo verrà esposto il Modello Standard, e saranno discusse alcune teorie per la sua estensione.

Introduzione

La teoria che descrive l'unificazione della forza elettromagnetica (EM) con quella debole (weak interaction, WI), detta interazione elettrodebole (Electroweak, EW), è detta Quantum Flavour Dynamics (QFD). La forza forte (Strong Interaction, SI) viene descritta dalla Quantum Electrodynamics (QCD). Insieme formano il cosiddetto Modello Standard (Standard Model, SM). Per dare massa alle particelle senza violare l'invarianza di gauge, che si ritiene essere il cuore centrale dello SM, bisogna aggiungere un ulteriore campo scalare autointeragente detto di Higgs: dei 4 gradi di libertà che possiede, 3 sono "mangiati" ed originano appunto la massa dei bosoni vettori $W^{\pm}$, Z^0 e dei fermioni massivi tramite rottura spontanea di simmetria (spontaneous symmetry breaking, SSB). Il bosone stesso di Higgs acquisisce massa per autointerazione.
Lo SM è basato sull'ipotesi che le interazioni provengano da simmetrie locali di gauge. Per ottenere ciò bisogna:

1. Scegliere il gruppo di simmetria che caratterizza l'interazione, come ad esempio U(1), SU(2), SU(3), etc..;

2. Imporre l'invarianza di gauge locale. Da qui appaioni i mediatori del campo;

3. Scegliere il settore di Higgs che produca SSB. Da qui alcune particelle acquistano massa;

4. Rinormalizzare gli accoppiamenti e le masse. Da qui si ottiene il running delle costanti di accoppiamento.

Lo SM è basato sulla simmetria dei gruppi unitari $SU(3)_C \otimes [SU(2)_L \otimes U(1)_Y]$. La carica dell'interazione forte è la carica di colorequella della WI la terza componente dell'Isospin debole I_z. L'interazione WI a corrente carica (charged current, CC) opera solo su particelle sinistrorse (ugualemente dette ad elicità negativa ovvero con lo spin antiparallelo all'impulso). Dato che in natura non sembrano esistere neutrini destrorsi o antineutrini sinistrorsi, si conclude che per ogni generazione di hanno:

- 2 leptoni L + 1 Leptone R
- 2 x 3 quark L + 2 x 3 quark R

Per un totale di 15 fermioni.
L'interazione EM nasce da una particolare combinazione dei bosoni di gauge di $SU(2)_L$ e $U(1)_Y$, ovvero dalla relazione di Gell-Mann - Nishijima che definisce la carica elettrica come:

$Q = I_z + \frac{1}{2}Y_W$

dove Y_W è la somma dei numeri barionico, strano/ di charm/etc riferiti ad una stessa particella.

1 Simmetrie continue e teorema di Noether

Nella teoria dei campi, i campi sono utilizzati per descrivere il comportamento delle particelle fondamentali. La dinamica discende dalla densità di lagrangiana $\mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu\phi(x))$, che dipende solo dai campi e dalle loro derivate prime. Questo tipo di formalismo è particolarmente conveniente in quanto permette di riconoscere abbastanza facilmente le simmetrie del sistema, e quindi le costanti del moto. Dato un sistema di campi ϕ_a, dal principio variazionale:

$\delta S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi_a(x), \partial_\mu\phi_a(x)) = 0$

si ricavano le equazioni del moto di Eulero-Lagrange:

$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\phi_a(x)]} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\phi_a(x)}$

Si definiscono *momenti coniugati* dei campi le variabili $\pi_a(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi_a)}$

Infine, si assumono le relazioni di commutazione per quantizzare i campi:

$[\phi_a(\vec{x}, t), \phi_b(\vec{y}, t)] = [\pi_a(\vec{x}, t), \pi_b(\vec{y}, t)] = 0$
$[\phi_a(\vec{x}, t), \pi_b(\vec{y}, t)] = i\delta_{ab}\delta^3(\vec{x} - \vec{y})$

A questo punto, il teorema di Noether afferma che:

Ad ogni simmetria continua della Lagrangiana corrisponde una quantità conservata (carica) e viceversa.

Senza entrare nei dettagli della dimostrazione, si può accennare al fatto che se nella variazione della Lagrangiana le variazioni dei campi sono legate a trasformazioni di simmetria della Lagrangiana stessa, è possibile ricavare una *corrente conservata* che, tramite il teorema di Gauss, porta ad una *carica conservata*.

$j^{i\mu}(x) \equiv -i\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} T^i_{ab}\phi_b \Rightarrow Q^i(x) \equiv \int d^3x j^{i0}(\vec{x}, t)$

Si dimostra che le cariche soddisfano la stessa condizione (algebra di Lie) dei generatori della trasformazione di simmetria della Lagrangiana:

$[T^i, T^j] = i\epsilon_{ijk}T^k \Rightarrow [Q^i, Q^j] = i\epsilon_{ijk}Q^k$

Tramite il commutatore del campo

$[Q^i, \phi] = -T^i\phi$

si dimostra che una trasformazione infinitesima dei campi è generata da:

$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\theta^i Q^i}\phi e^{-i\theta^i Q^i} = \phi + i\theta^i [Q^i, \phi] + O(\theta^2)$

2 QED

La Lagrangiana per descrivere un fermione libero è:

$\mathcal{L}_D(x) \equiv \overline{\psi}(x) \left(\imath \not{\partial} - m\right) \psi(x)$

Dalla quale, tramite le equazioni di Eulero-Lagrange, è possibile ricavare l'equazione di Dirac:

$\left(\imath \gamma^\mu \partial_\mu - m\right) \psi(x) = 0$

Dove $\psi(x)$ è uno spinore a quattro componenti nel punto x dello spaziotempo e γ^μ sono le matrici 4x4 di Dirac (si capisce che m viene moltiplicata per una matrice unità 4x4). Ora cerchiamo una trasformazione che renda invariante la lagrangiana di Dirac ($\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$):

$\psi' = e^{i\epsilon\alpha}\psi = U_\alpha \psi$

L'invarianza per questa trasformazione implica che la fase è arbitraria e non osservabile ($U_\alpha^+ U_\alpha = 1$ unitaria). Abbiamo anche, come desiderato in partenza, che $\partial_\mu \psi' = e^{i\epsilon\alpha}\partial_\mu \psi$.

Se però $\alpha = \alpha(x)$:

$\mathcal{L}' = \overline{\psi'}(x)\left(\imath\partial\!\!\!/ - m\right)\psi'(x) = \overline{\psi}(x)\left(\imath\partial\!\!\!/ - m\right)\psi(x) + \epsilon\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\partial_\mu\alpha(x) =$
$\mathcal{L} + \epsilon j^\mu(x)\partial_\mu\alpha(x)$

$\partial_\mu \psi' = e^{\imath\epsilon\alpha(x)}[\partial_\mu\psi(x) + i\epsilon\partial_\mu\alpha(x)\psi(x)] \neq e^{i\epsilon\alpha(x)}\psi(x)$

$\Rightarrow \mathcal{L}$ non è invariante. Per ovviare a questo problema dobbiamo cambiare la definizione di derivata, traformandola in quella che viene comunemente chiamata *derivata covariante*:

$D_\mu \equiv \partial_\mu - \imath\epsilon A_\mu(x)$

Così facendo abbiamo introdotto un campo vettoriale, e il risultato è che ora:

$\mathcal{L} \to \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \epsilon j^\mu A_\mu$

Se il campo si trasforma nel seguente modo:

$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{\epsilon}\partial_\mu\alpha(x)$

Il termine in più viene cancellato esattamente e la Lagrangiana resta invariante per la trasformazione di fase locale. Ora campi e derivate dei campi si trasformano in modo uguale. Pertanto conviene scrivere in maniera compatta:

$\mathcal{L} = \overline{\psi}(x)\left(\imath D\!\!\!/ - m\right)\psi(x)$

Ma il lavoro non è ancora finito: bisogna ancora introdurre un termine cinetico (ed eventualmente di massa) per il campo $A_\mu(x)$. Dalla formulazione covariante dell'EM:

$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

Inoltre, la derivata covariante soddisfa la seguente relazione (in seguito molto utile per generalizzare il termine cinetico del campo):

$[D_\mu, D_\nu]\,\psi = -i\epsilon F_{\mu\nu}\psi$

Risulta che la lagrangiana completa è:

$$\mathcal{L}_{QED} = \overline{\psi}(x)\,(\imath\not{D} - m)\,\psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

L'invarianza di gauge per il campo EM porta ad una corrente conservata e quindi, tramite il teorema di Noether, ad una carica conservata, identificata con la carica elettrica. Inoltre, i quanti del campo vettoriale descritti da $A_\mu(x)$ sono privi di massa, come correttamente devono essere per rappresentare i fotoni. Infatti, nella lagrangiana un termine quadratico nel campo del tipo $\frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu$ la renderebbe non gauge-invariante.
Questa teoria risulta inoltre rinormalizzabile, con cancellazione sistematica delle divergenze ad ogni ordine perturbativo in α_{em}.

3 Campi di Yang-Mills

Si può estendere il discorso precedente al gruppo di simmetria $SU(N)$, che in generale è non-abeliano. In principio $SU(2)$ è stato utilizzato per descrivere la simmetria di isospin forte tra protone e neutrone. I generatori di questo gruppo di simmetria sono le tre matrici di Pauli (o alternativamente le $\tau^i = \sigma^i/2$).

$$\psi' = U\psi = e^{ig\vec{\tau}\cdot\vec{\lambda}(x)}\psi \Rightarrow$$

I generatori di $SU(2)$ soddisfano l'algebra:

$$[\tau_i, \tau_j] = \varepsilon_{ijk}\tau_k$$

E ovviamente non commutano (il gruppo è per l'appunto non abeliano). Il campo fermionico in questione è un doppietto fermionico detto *isospinore*:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

$\overline{\psi} = (\overline{\psi}_1\overline{\psi}_2)$ dove $\overline{\psi}_{1,2} \equiv \psi^+_{1,2}\gamma^0$

Inizialmente $\psi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$ per descrivere l'interazione tra protoni e neutroni, ma concettualmente è utile anche per descrivere quark di una stessa generazione.

Ora vogliamo costruire una Lagrangiana invariante per la trasformazione $SU(2)$ locale. Per fare questo, in analogia col caso $U(1)$, introduciamo un campo isovettoriale $\vec{W}_\mu$ (l'indice i si riferisce allo spazio di isospin, mentre l'indice μ allo spaziotempo) con accoppiamento g, per cui la derivata covariante diventa:

$D_\mu \equiv \partial_\mu - ig\vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu$

Come per la QED, richiediamo che valga $(D_\mu\psi)' = D'_\mu\psi' = U(D_\mu\psi)$, per cui:

$D'_\mu = UD_\mu U^{-1}$

Pertanto bisogna che il campo si traformi nel seguente modo:

$\vec{W}'_\mu = U\vec{W}_\mu U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1}$

In questo modo la derivata covariante rispetta la legge di trasformazione desiderata. Esplicitando l'espressione della D_μ otteniamo:

$W'^i_\mu = W^i_\mu + \epsilon_{ijk}\lambda^j W^k_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu\lambda^i$

Adesso possiamo calcolare il commutatore della derivata covariante:

$[D_\mu, D_\nu]\,\psi = -ig\vec{\tau} \cdot \vec{F}_{\mu\nu}$ con $F^i_{\mu\nu} = \partial_\mu W^i_\nu - \partial_\nu W^i_\mu + g\epsilon_{ijk}W^j_\mu W^k_\nu$

Come si può ben vedere, nell'espressione del campo c'è un pezzo in più rispetto alla QED, e questo in definitiva deriva dal fatto che $SU(2)$ è non-abeliano. Richiedendo che $([D_\mu, D_\nu]\,\psi)' = U([D_\mu, D_\nu]\,\psi)$ segue la regola di trasformazione del tensore di intensità del campo:

$\vec{F}'_{\mu\nu}\psi' = U\vec{F}_{\mu\nu}U^{-1}$

Infine possiamo costruire il termine cinetico per il campo, che sempre in analogia col caso QED risulta essere:

$-\frac{1}{2}Tr(\vec{F}_{\mu\nu} \cdot \vec{F}^{\mu\nu}) = -\frac{1}{4}F^i_{\mu\nu}F^{i\mu\nu}$

In definitiva, l'espressione per la Lagrangiana è:

$\mathcal{L} = \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_G = \overline{\psi}(x)\,(\imath\not{D} - m)\,\psi(x) - \frac{1}{4}F^i_{\mu\nu}F^{i\mu\nu}$

In questo caso però la Lagrangiana del campo di gauge risulta avere un'espressione piuttosto complessa:

$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{2}\partial_\mu W^i_\nu(\partial^\mu W^{i\nu} - \partial^\nu W^{i\mu}) - g\varepsilon_{ijk}W^i_\mu W^j_\nu\partial^\mu W^{k\nu} - \frac{g^2}{4}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm}W^j_\mu W^k_\nu A^{l\mu}A^{m\nu}$

Anche in questo caso però il campo mediatore è massless, e quindi non può essere interpretato come il campo dei bosoni vettori elettrodeboli (e neanche come i pioni o la ρ).

4 Densità di Lagrangiana del campo fermionico

Come già mostrato, tramite le equazioni di Eulero-Lagrange è possible mostrare che la lagrangiana che porta all'equazione di Dirac è:

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}\left(i\partial\!\!\!/ - m\right)\psi = i\overline{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\overline{\psi}\psi$$

Per essere $SU(N)$ invariante, deve essere che $\mathcal{L}(\psi') = \mathcal{L}(\psi)$ con $\psi' = U\psi$ e $UU^{+} = 1$ (unitaria):

$$U = \exp\left(-i\vec{\alpha}(x)\cdot\vec{F}\right) = \exp\left(-i\sum_{k=1}^{N-1}\alpha_k(x)\cdot F_k\right)$$

dove $\alpha_k(x)$ sono i parametri e F_k i generatori del gruppo di simmetria. Il gruppo ha $N-1$ gradi di libertà. Ad esempio, in $SU(2)$ i generatori sono le tre matrici di Pauli, mentre in $SU(3)$ sono le otto matrici di Gell-Mann. Le cariche di colore implicano la natura non abeliana di $SU(3)$ e viceversa.
Per garantire l'invarianza di gauge si introduce la derivata covariante in maniera tale che $D'_{\mu}\psi' = UD_{\mu}\psi$:

$$\mathcal{L} = i\overline{\psi}\gamma^{\mu}D_{\mu}\psi - m\overline{\psi}\psi \Rightarrow$$

$$D_{\mu} = \partial_{\mu} + i\frac{g'}{2}B_{\mu}Y_{\mu} + i\frac{g}{2}\vec{W}_{\mu}\cdot\vec{\tau} + i\frac{g_S}{2}\vec{G}_{\mu}\cdot\vec{\lambda}$$

Ora abbiamo:

- B_{μ} (1) media $U(1)$ con costante di accoppiamento g';
- $\vec{W}_{\mu}$ (3) mediano $SU(2)$ con costante di accoppiamento g;
- $\vec{G}_{\mu}$ (8) mediano $SU(3)$ con costante di accoppiamento g_S

Tutti questi campi sono massless! Ci manca ancora qualcosa!

5 SSB e meccanismo di Higgs

Si introduce un campo scalare autointeragente: questa autointerazione modifica lo stato di vuoto (lo stato di minima energia, ground state) in modo da non renderlo più autostato dell'ipercarica o dell'isospin debole. Questo porta alla cosiddetta rottura spontanea di simmetria; il campo di Higgs non è massless a causa dell'autointerazione, ma il valore numerico di questa massa non è previsto. La Lagrangiana per questo campo scalare (di Higgs) è:

$\mathcal{L}_H \equiv \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - V(\phi^*\phi), V(\phi^*\phi) = m\phi^*\phi + \lambda(\phi^*\phi)^2$

Questo sistema è equivalente ad uno descritto da una Lagrangiana del tipo:

$\mathcal{L} \equiv \frac{1}{2}\partial_\mu \varphi_1 \partial^\mu \varphi_1 + \frac{1}{2}\partial_\mu \varphi_2 \partial^\mu \varphi_2 - V(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)$

Mentre la prima ha simmetria $O(2)$, la seconda ha simmetria $U(1)$. Il potenziale $V(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)$ può essere al massimo del quarto grado per permettere alla teoria di essere rinormalizzabile (in uno spazio a 4 dimensioni), e deve avere un minimo per descrivere uno stato di minima energia. I casi realmente interessanti per i nostri scopi sono due:

$$\begin{array}{rcl} V(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) & = & \frac{\mu}{2}\phi^*\phi + \lambda(\phi^*\phi)^2 \\ V(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) & = & -\frac{\mu}{2}\phi^*\phi + \lambda(\phi^*\phi)^2 \end{array}$$

Nel primo caso il minimo si ha per $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ e non è di grande interesse. Tuttavia vale la pena di notare che il ground state è $U(1)$ invariante come la Lagrangiana.
Nel secondo caso invece il minimo del potenziale è una circonferenza di raggio v, ed è chiamato *fase di Nambu-Goldstone*. In particolare si ha che:

$\phi = ve^{i\theta}$

$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = |\phi|^2 = v^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}$

v = vacuum expectation value (v.e.v.), θ è una fase. Se $v \neq 0$ la simmetria locale di gauge è "rotta". Conviene utilizzare una fase tale per cui $\varphi_1 = v$ e $\varphi_2 = 0$, così che la matrice di massa diventi:

$m_{ab}^2 = \begin{pmatrix} 2\lambda v^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

In questo modo possiamo operare un "cambio di coordinate" per cui $\varphi_1' = \varphi_1 - v$ mentre $\varphi_2' = \varphi_2$ e riscrivere la Lagrangiana in funzione di questi nuovi campi:

$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_2)^2 - \frac{1}{2}(2\lambda v^2)\varphi_1'^2 + \lambda v \varphi_1'(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - \frac{\lambda}{4}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^2$

Questa Lagrangiana non ha più simmetria O(2) come quella originale! Si suol dire che la simmetra è rotta spontaneamente tramite la rottura di simmetria del vuoto. Si chiama anche *simmetra nascosta* oppure *spontaneous symmetry breaking* (SSB). È importante notare come i campi iniziali fossero massless, mentre i campi trasformati sono uno massivo (con massa $m^2 = 2\lambda v^2$) e uno massless (tecnicamente detto essere un *bosone di Goldstone*).

Per far tornare i conti con l'unificazione elettrodebole abbiamo bisogno di 4 gradi di libertà (corrispondenti ai tre bosoni massivi e al fotone), per cui abbiamo bisogno di un doppietto di campi complessi (2x2=4 gradi di libertà):

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 + i\varphi_2 \\ \varphi_3 + i\varphi_4 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^+)(\partial^\mu \phi) - V(\phi^+\phi)$$

$$V(\phi^+\phi) = -\frac{\mu^2}{2}\phi^+\phi + \lambda(\phi^+\phi)^2$$

Il vuoto sarà lo stato $(0, v)$: perché $\phi(x)$ sia costante i termini con le derivate nella $\mathcal{L}$ devono annullarsi:

$$\phi(x) = e^{i\vec{\xi}(x)\cdot\vec{\tau}/2} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix} \text{ con } (\phi^+\phi)|_0 = |\phi_0|^2 = v^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}$$

Dove $\vec{\xi}(x)$ e $h(x)$ parametrizzano le fluttuazioni nei 4 gradi di libertà. Agendo come fatto prima, vediamo che nella nuova parametrizzazione la Lagrangiana è:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu H \partial^\mu H + \frac{1}{8v^2}\partial_\mu \xi^i \partial^\mu \xi^i (v + H)^2 - V((v + H)^2)$$

Si vede subito che il campo H ha massa $m_H = \sqrt{2\mu^2}$ mentre i campi ξ^i sono massless (bosoni di Goldstone), e sono in numero uguali al numero dei generatori della simmetria (in $SU(2)$ sono le tre matrici di Pauli). La simmetria $SU(2)$ iniziale è sparita.

Finora abbiamo utilizzato simmetri globali, ma come sappiamo il cuore delle teorie di gauge risiede nelle simmetrie *locali*. Per i nostri scopi dovremo ricorrere quindi ad una Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^+(D^\mu \phi) - V(\phi^+\phi) - \frac{1}{4}F^i_{\mu\nu}F^{i\mu\nu}$$

con:

$$\begin{array}{rcl} D_\mu &=& \left(\partial_\mu - g\frac{g}{2}\tau^i W^i_\mu\right) \\ V(\phi^+\phi) &=& -\mu^2\phi^+\phi + \lambda(\phi^+\phi)^2 \\ F^i_{\mu\nu} &=& \partial_\mu W^i_\nu - \partial_\nu W^i_\nu + g\varepsilon_{ijk}W^j_\mu W^k_\nu \end{array}$$

Parametrizziamo ϕ in maniera analoga a prima:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\vec{\xi}(x)\cdot\vec{\tau}/2} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix}$$

Tuttavia, utilizzando un'opportuna rotazione $U(x) = \exp(-\imath\tau^i\xi^i(x)/2v)$ (detta *U-gauge*) i campi $\vec{\xi}(x)$ spariscono e otteniamo:

$$\begin{array}{ccccl} \phi(x) & \rightarrow & \phi'(x) & = & U(x)\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v+H(x) \end{pmatrix} \\ \vec{W}_\mu & \rightarrow & \vec{B}_\mu & = & U(x)\vec{W}_\mu U^{-1} - \frac{\imath}{g}(\partial_\mu U)U^{-1} \\ D_\mu\phi & \rightarrow & (D_\mu\phi)' & = & \left(\partial_\mu - g\frac{g}{2}\tau^i B^i_\mu\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v+H(x) \end{pmatrix} \\ F^i_{\mu\nu}(W) & \rightarrow & F^i_{\mu\nu}(B) & = & \partial_\mu B^i_\nu - \partial_\nu B^i_\nu + g\varepsilon_{ijk}B^j_\mu B^k_\nu \end{array}$$

Per cui la lagrangiana diventa:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}' & = & (D_\mu\phi)'^+(D^\mu\phi)' + \mu^2(\phi'^+\phi') - \lambda(\phi'^+\phi)^2 - \frac{1}{4}F^i_{\mu\nu}(B)F^{\imath\mu\nu}(B) \\ & = & \frac{1}{2}\partial_\mu H\partial^\mu H - \mu^2H^2 - \frac{1}{4}F^i_{\mu\nu}F^{i\mu\nu} + \frac{g^2v^2}{8}B^i_\mu B^{i\mu} \\ & + & \frac{g^2}{8}B^i_\mu B^{i\mu}H(2v+H) - \lambda vH^3 - \frac{\lambda}{4}H^4 - \frac{v^4}{4} \end{array}$$

Quindi abbiamo: 3 vettori massivi $\vec{B}_\mu$ con massa $m_B = \frac{1}{2}gv$ e un campo scalare H con $m_H = \sqrt{2\mu^2}$. I campi $\vec{\xi}$, corrispondenti ai bosoni di Goldstone, spariscono anche in questo caso e pertanto non hanno un significato fisico reale: si dice che vengono "mangiati" per dare massa ai campi reali.

6 Il modello elettrodebole

In seguito alle osservazioni sperimentali, possiamo concludere che le correnti elettrodeboli associano doppietti sinistrorsi e singoletti destrorsi in varie combinazioni specifiche. Avremo pertanto, per ogni generazione di leptoni:

$$L = \frac{1-\gamma_5)}{2}\begin{pmatrix} \nu_l \\ l^- \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \nu_l \\ l \end{pmatrix}_L$$

$$R = \frac{1+\gamma_5}{2}l \equiv l_R$$

Bisogna quindi tenere in mente che la corrente elettromagnetica dovrà risultare da:

$$\begin{array}{rcl} \vec{J}_\mu & = & \overline{L}'\gamma_\mu\vec{\tau}L' \\ J^{EM}_\mu & = & -Q\bar{l}\gamma_\mu l = -Q\bar{l}_L\gamma_\mu l_L - Q\bar{l}_R\gamma_\mu l_R \\ J^Y_\mu & = & -\overline{L}'\gamma_\mu L' - 2\overline{R}'\gamma\mu R' \end{array}$$

Ricordando la formula di Gell-Mann - Nishijima $Q = I_z + \frac{1}{2}Y$, e tenendo conto del fatto che $I_z = T_3$ (terzo generatore di $SU(2)$):

$$Q = \int d^3x j^{EM}_0(x) = -\int d^3x\bar{l}_L\gamma_0 l_L - Q\bar{l}_R\gamma_0 l_R$$

$\frac{1}{2}Y = Q - T_3 = \int d^3x \left(-\frac{1}{2}\nu_L^+\nu_L - \frac{1}{2}l_L^+ l_L - l_R^+ l_R\right)$

L'operatore Y commuta con T^i, quindi gli autovalori Y (ipercarica) e I_z (isospin debole) si conservano, come infatti avviene.
Per cominciare a costruire il modello, si parte quindi dalle due simmetrie:

$$\begin{array}{rll} SU(2)_Y\text{:} & L' = e^{-\imath\vec{\tau}\cdot\vec{\alpha}(x)}L & R' = R \\ U(1)_Y\text{:} & L' = e^{\frac{1}{2}\imath\beta(x)}L & R' = e^{\frac{1}{2}\imath\beta(x)}R \end{array}$$

Prima di introdurre il meccanismo di Higgs, consideriamo $\vec{\alpha}$ e β indipendenti da x.
Senza grandi sorprese, la Lagrangiana invariante per $SU(2)_Y \bigotimes U(1)_Y$ sarà:

$$\mathcal{L}_F = \overline{L}\imath\gamma^\mu\left(\partial_\mu - \imath g\vec{\tau}\cdot\vec{A}_\mu + \imath\frac{g'}{2}B_\mu\right)L + \overline{R}\imath\gamma^\mu\left(\partial_\mu + \imath g' B_\mu\right)R$$

Dove evidentemente i campi $\vec{A}_\mu$ sono associati a $SU(2)_Y$ con costante di accoppiamento g, e il campo B_μ a $U(1)_Y$ con costante di accoppiamento g'. Il singoletto di isospin R non si accoppia con $\vec{A}_\mu$. I campi sono massless per non violare l'invarianza di gauge: questo è a prima vista un problema perchè i leptoni carichi hanno massa! Ma a questo ovvierà in maniera appositamente costruita il campo di Higgs. La derivata covariante sarà:

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - \imath g\vec{\tau}\cdot\vec{A}_\mu + \imath g'\frac{Y}{2}B_\mu$$

Con $Y = -1$ per L e $Y = -2$ per R.
I termini cinetici per i campi di gauge saranno:

$$\begin{array}{rcl} F^i_{\mu\nu} & = & \partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu + g\varepsilon_{ijk}A^j_\mu A^k_\nu \\ B_{\mu\nu} & = & \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \end{array}$$

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4}F^i_{\mu\nu}F^{i\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$$

Anche qui vale la pena notare che non appaiono termini di massa, che romperebbero l'invarianza di gauge. Per ovviare al problema bisognerà utilizzare il campo di Higgs. Aggiungiamo alla Lagrangiana un ulteriore pezzo, la Lagrangiana del campo scalare (che sarà un doppietto complesso), con derivata covariante analoga a quella definita sopra e il potenziale descritto precedentemente con $m^2 = -\mu$:

$$\phi = \begin{pmatrix} \varphi^{(+)} \\ \varphi^{(0)} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}_H = (D_\mu\phi)^+(D^\mu\phi) - V(\phi^+\phi)$$

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - \imath g\vec{\tau}\cdot\vec{A}_\mu - \imath g'\frac{Y}{2}B_\mu \text{ con } Y_\phi = +1$$

È imprtante notare che in questa derivata covariante cambia il segno dell'accoppiamento di $SU(2)$.

Adesso possiamo anche dare massa al leptone carico, utilizzando la cosiddetta *Lagrangiana di Yukawa*:

$$\mathcal{L}_Y = -G_l\,(\overline{L}\phi L + \overline{R}\phi^+ R) + h.c.$$

Per cui, mettendo tutto insieme, la Lagrangiana sarà:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_Y$$

Ora possiamo applicare il meccanismo di Higgs: per prima cosa, notiamo che gli operatori Y e T_3 non azzerano il vuoto:

$$\phi_0 = \langle 0|\,\phi\,|0\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$

$$T_3\phi_0 = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} = -\tfrac{1}{2}\phi_0$$

$$Y\phi_0 = \phi_0$$

Si dice che questi sono *generatori rotti*, ovvero:

$$e^{-\imath\alpha^3 T^3}\phi_0 \neq \phi_0$$

$$e^{-\imath\beta Y/2}\phi_0 \neq \phi_0$$

Tuttavia c'è una combinazione dei generatori che non è rotta:

$$Q\phi_0 = \left(T_3 + \tfrac{1}{2}Y\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} = 0$$

$$e^{-\imath\epsilon Q}\phi_0 = \phi_0$$

Per cui anche dopo la rottura di simmetria resterà comunque una simmetria $U(1)_{EM}$ associata alla carica elettrica.
Ora parametrizziamo le fluttuazioni del campo scalare come fatto in precedenza:

$$\phi = \begin{pmatrix} \varphi^{(+)} \\ \varphi^{(0)} \end{pmatrix} = e^{\imath\vec{\tau}\cdot\vec{\xi}/2v}\begin{pmatrix} 0 \\ (v+H)/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Quindi utilizziamo la rotazione di *U-gauge*:

$U(\vec{\xi}) = e^{-\imath\vec{\tau}\cdot\vec{\xi}/2v}$

E quindi otteniamo:

$$\begin{aligned} \phi' = &\quad U(\vec{\xi} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(v+H)\chi, \chi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ L' = &\quad U(\vec{\xi})L \\ \vec{A}'_\mu \cdot \vec{\tau} = &\quad U(\vec{\xi})(\vec{A}_\mu \cdot \vec{\tau})U(\vec{\xi})^{-1} - \tfrac{\imath}{g}(\partial_\mu U(\vec{\xi})U(\vec{\xi})^{+} \end{aligned}$$

La Lagrangiana è invariante per questa trasformazione
Espandendende le derivate covarianti in $\mathcal{L}_H$ nella *U-gauge*, otteniamo un'espressione piuttosto complicata. È possibile isolare in $\mathcal{L}_H$ una parte che potremmo chiamare *Lagrangiana di massa*:

$\mathcal{L}_M = \frac{v^2}{8}\left(g^2 A'^1_\mu A'^{1\mu} + g^2 A'^2_\mu A'^{2\mu} + (gA'^3_\mu - g'B'_\mu)\right)$

Conviene a questo punto introdurre il campo bosonico carico $W^\pm$ come combinazione lineare:

$W^{(\pm)}_\mu = \frac{A'^1_\mu \mp A'^2_\mu}{\sqrt{2}}$

In modo che i primi due termini di $\mathcal{L}_M$ possono essere riscritti come $\frac{1}{4}g^2v^2W^{(+)}_\mu W^{(-)\mu}$, e da questo si ricava a vista che:

$m_W = \frac{1}{2}gv$

La parte rimanente, che descrive le correnti neutre:

$\frac{v^2}{8}\left(A'^3_\mu B'_\mu\right)\begin{pmatrix} g'2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{3\mu} \\ B^\mu \end{pmatrix}$

Può essere diagonalizzata utilizzando una combinazione lineare:

$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ E_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_W & -\sin\theta_W \\ \sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A'^3_\mu \\ B'^\mu \end{pmatrix}$

E risulta che:

$J^{EM}_\mu = J^3_\mu + \frac{1}{2}J^Y_\mu$

Si ottengono quindi le relazioni:

$$
\begin{aligned}
\tan\theta_W &= \tfrac{g'}{g}\\
\sin\theta_W &= \tfrac{g'}{\sqrt{g^2+g'^2}}\\
\cos\theta_W &= \tfrac{g}{\sqrt{g^2+g'^2}}\\
m_Z &= \tfrac{1}{2}v\sqrt{g^2+g'^2} = \tfrac{m_W}{\cos\theta_W}\\
m_H &= \sqrt{2\mu^2}\\
\tfrac{1}{e^2} &= \tfrac{1}{g^2}+\tfrac{1}{g'^2}
\end{aligned}
$$

Queste relazioni valgono al livello fondamentale (*tree level*), e vengono modificate dalle correzioni radiative: c'è una dipendenza importante dalla massa del quark top e del bosone di Higgs. Questo ha permesso di fare stime sottosoglia sulla m_H e di verificare m_t.
Per dare massa ai fermioni si usa la lagrangiana di Yukawa per ogni leptone:

$$
\mathcal{L}_Y = -g_Y^e(\overline{e}_L\varphi e_R + \overline{e}_R\varphi^+ e_L) = -g_Y^e\left[(\overline{\nu}_L\overline{e}_L)\begin{pmatrix}0\\ v\end{pmatrix}e_R + \overline{e}_R(0v)\begin{pmatrix}\nu_L\\ e_L\end{pmatrix}\right] =
$$
$$
-\,g_Y^e\tfrac{v}{\sqrt{2}}\left[\overline{e}_L e_R + \overline{e}_R e_L\right] = -g_Y^e\tfrac{v}{\sqrt{2}}\overline{e}e = -m_e\overline{e}e
$$

E questo lo si ripete per le tre famiglie di leptoni e quark. Si impone quindi che $m_e = g_Y^e\frac{v}{\sqrt{2}}$ e così via.

Vale la pena di mettere in risalto le espressioni esplicite per le correnti neutre e cariche:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{CC} &= g(J^1_\mu A'^{1\mu} + J^2_\mu A'^{2\mu}) = \tfrac{g}{\sqrt{2}}(J^{(-)}_\mu W^{(-)\mu} + J^{(+)}_\mu W^{(+)\mu})\\
\mathcal{L}_{NC} &= gJ^3_\mu A'^{3\mu} + \tfrac{1}{2}g' J^Y_\mu B'^\mu =\\
&= \left(g\sin\theta_W J^3_\mu + \tfrac{g'}{2}\cos\theta_W J^Y_\mu\right)A^\mu + \left(g\cos\theta_W J^3_\mu - \tfrac{g'}{2}\sin\theta_W J^Y_\mu\right)Z^\mu
\end{aligned}
$$

7 Le altre generazioni leptoniche

Nel modello standard si assume che le generazioni siano 3 (e questa ipotesi è supportata da evidenze sperimentali). Pertanto dovremo includere nello schema:

$$
\begin{pmatrix}\nu_e\\ e^-\end{pmatrix}_L,\quad e_R;\quad \begin{pmatrix}\nu_\mu\\ \mu^-\end{pmatrix}_L,\quad \mu_R;\quad \begin{pmatrix}\nu_\tau\\ \tau^-\end{pmatrix}_L,\quad \tau_R
$$

La Lagrangiana fermionica sarà $\mathcal{L}_F = \mathcal{L}^e_F + \mathcal{L}^\mu_F + \mathcal{L}^\tau_F$, mentre quella per il campo bosonico e scalare resta invariata. La Lagrangiana di Yukawa invece necessita di nuovi termini, che semplificando per due generazioni hanno la forma:

$$
\mathcal{L}_Y = -G_{ee}\overline{L}_e\phi R_e - G_{\mu\mu}\overline{L}_\mu\phi R_\mu - G_{e\mu}\overline{L}_e\phi R_\mu - G_{\mu e}\overline{L}_\mu\phi R_e + h.c.
$$

In questo modo abbiamo invarianza di gauge, ma non appare ancora la conservazione dei numeri leptonici separatamente. Dopo la SSB otteniamo una Lagrangiana di massa:

$$\mathcal{L}_F^{(M)} = -\begin{pmatrix} \overline{e}_L & \overline{\mu}_L & \overline{\tau}_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{ee} & m_{e\mu} & m_{e\tau} \\ m_{\mu e} & m_{\mu\mu} & m_{\mu\tau} \\ m_{\tau e} & m_{\tau\mu} & m_{\tau\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_R \\ \mu_R \\ \tau_R \end{pmatrix}$$

Nella diagonalizzazione di questa matrice, dobbiamo trasformare i campi fermionici (autostati deboli) in campi "ruotati" (autostati di massa), che sono quelli sperimentalmente osservati. In generale, i secondi saranno esprimibili come combinazioni lineari dei primi, in particolare tramite due matrici di rotazione, una per L e una per R. Per semplificare il discorso, se le generazioni fossero due, ognuna dipenderebbe da un solo angolo (θ_L, θ_R). Risulta che l'angolo per la componente *left* può essere eliminato se i neutrini sono massless, e quindi gli autostati di massa diventano uguali a quelli deboli:

$$\begin{pmatrix} L'_e \\ L'_\mu \end{pmatrix} = \mathcal{R}(\theta_L) \begin{pmatrix} L_e \\ L_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_L \nu_e + \sin\theta_L \nu_\mu \\ e'_L \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\sin\theta_L \nu_e + \cos\theta_L \nu_\mu \\ \mu'_L \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Per cui si ridefiniscono:

$$\begin{aligned} \nu'_e &= \cos\theta_L \nu_e + \sin\theta_L \nu_\mu \\ \nu'_\mu &= -\sin\theta_L \nu_e + \cos\theta_L \nu_\mu \end{aligned}$$

I doppietti sono ancora diagonali nella base degli autostati di massa. Nelle correnti cariche non c'è *flavour mixing*, e da questo segue in maniera naturale la conservazione dei numeri leptonici separatamente. In definitiva, va osservato che il tutto deriva dal fatto che i neutrini sono massless! Infatti, se fossero massivi, non si potrebbe eseguire la redefinizione e risulterebbero essere sovrapposizioni di due autostati di massa, il che condurrebbe ad un'oscillazione di flavour.

L'accoppiamento col bosone di Higgs non miscela i flavour:

$\mathcal{L}_{Hll} = -\frac{1}{v} H (m_e \overline{e}' e' + m_\mu \overline{\mu}' \mu' + m_\tau \overline{\tau}' \tau')$

8 Inclusione dei quark

Per analogia, li descriveremo nel seguente modo:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \quad u_R, \quad d_R;$$
$$\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L, \quad c_R, \quad s_R;$$
$$\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L, \quad t_R, \quad b_R.$$

L'interazione debole è color blind, quindi non teniamo conto di questo grado di libertà. La differenza sostanziale risiede nel fatto che i quark sono tutti massivi, per cui si hanno due singoletti right per ogni generazione. Inoltre, la carica dei quark è frazionaria rispetto a quella dei leptoni carichi. Per scrivere in maniera compatta la Lagrangiana, conviene porre:

$$Q_L^i = \begin{pmatrix} U^i \\ D^i \end{pmatrix}_L, \quad U_R^i, \quad D_R^i$$

Per cui:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}_F & = & \sum \overline{Q}_L^i \imath\gamma^\mu(\partial_\mu - \imath g\vec{\tau}\cdot\vec{A}_\mu - \frac{\imath}{6}g' B_\mu)Q_L^i \\ & + & \sum \overline{U}_R^i \imath\gamma^\mu(\partial_\mu - \imath\frac{2}{3}g' B_\mu)U_R^i \\ & + & \sum \overline{D}_R^i \imath\gamma^\mu(\partial_\mu - \imath\frac{1}{3}g' B_\mu)D_R^i \end{array}$$

Le Lagrangiane per il campi di gauge e scalare restano invariate, metre la Lagrangiana di Yukawa diventa:

$$\mathcal{L}_Y = -\sum\left(\Gamma_{ij}^D \overline{Q}_L^i \phi D_R^j + \Gamma_{ij}^U \overline{Q}_L^i(\imath\tau_2\phi^*)U_R^j + h.c.\right)$$

Da questa possono essere estratte due matrici di massa $M^{(U)}$ e $M^{(D)}$, che possono essere diagonalizzate separatamente. Da qui si passa alla base degli autostati di massa. In questa trattazione però abbiamo tenuto conto solo dell'interazione elettrodebole. Se si introduce anche la forza forte, bisogna aggiungere un altro pezzo alla lagrangiana ($\mathcal{L}_{QCD}$), il quale a sua volta fa apparire un nuovo pezzo nella lagrangiana di massa. Questo porta al cosiddetto "*strong QCD problem*".

Le correnti cariche implicano il *flavour mixing*:

$$\mathcal{L}_{CC}^{(Q)} = \frac{g}{\sqrt{2}}\sum \overline{U}_L^i \gamma^m u D_L^i W_\mu^+ + \frac{g}{\sqrt{2}}\sum \overline{D}_L^i \gamma^m u U_L^i W_\mu^-$$

Si passa quindi alla base degli autostati di massa. Nel caso semplice di 4 quark in 2 generazioni:

$$\mathcal{L}_{CC} = \frac{g}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \overline{u} & \overline{c} \end{pmatrix}\gamma^\mu \frac{1-\gamma_5}{2} V \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} W_\mu^+ + h.c.$$

$$V = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} \\ V_{cd} & V_{cs} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_C & \sin\theta_C \\ -\sin\theta_C & \cos\theta_C \end{pmatrix}$$

I doppietti sono quindi:

$$Q_L^1 = \begin{pmatrix} u \\ d_C \end{pmatrix}_L \quad Q_L^2 = \begin{pmatrix} c \\ s_C \end{pmatrix}_L$$

$$\begin{pmatrix} d_C \\ s_C \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} \cos\theta_C & \sin\theta_C \\ -\sin\theta_C & \cos\theta_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}_L$$

È molto importante osservare che se applichiamo il primo doppietto ad una corrente neutra:

$$\begin{aligned} \overline{Q}_L^1\gamma_\mu\tau^3 Q_L^1 &= \tfrac{1}{2}\overline{u}_L\gamma_m u u_L - \tfrac{1}{2}\cos^2\theta_C \overline{d}_L\gamma_\mu d_L - \tfrac{1}{2}\sin^2\theta_C \overline{s}_L\gamma_\mu s_L \\ &- \tfrac{1}{2}\cos\theta_C\sin\theta_C\left(\overline{d}_L\gamma_\mu s_L + \overline{s}_L\gamma_\mu d_L\right) \end{aligned}$$

L'ultimo termine cambia la stranezza, ma questo fenomeno nelle correnti neutre non è mai stato osservato. Per risolvere questo problema, nel 1970 Glashow, Iliopoulos e Maiani proposero l'esistenza di un quarto quark e la costituzione di un secondo doppietto. Questo produce una corrente:

$$\begin{aligned} \overline{Q}_L^2\gamma_\mu\tau^3 Q_L^2 &= \tfrac{1}{2}\overline{c}_L\gamma_m u c_L - \tfrac{1}{2}\cos^2\theta_C \overline{s}_L\gamma_\mu s_L - \tfrac{1}{2}\sin^2\theta_C \overline{d}_L\gamma_\mu d_L \\ &+ \tfrac{1}{2}\cos\theta_C\sin\theta_C\left(\overline{d}_L\gamma_\mu s_L + \overline{s}_L\gamma_\mu d_L\right) \end{aligned}$$

Che cancella esattamente la corrente neutra *flavour changing* (FCNC) data dal primo doppietto, a causa del segno opposto.

Nel caso a 6 quark la matrice V ha 3 angoli e una fase, che porta ad una violazione CP. Lo schema completo è dovuto a Kobayashi e Maskawa che generalizzarono la matrice di Cabibbo (la matrice 3x3 è per l'appunto chiamata matrice CKM). Questa viene scritta come:

$$V = R_1(\theta_2)R_3(\theta_1)C(0,0,\delta)R_1(\theta_3) = \begin{pmatrix} c_1 & s_1c_3 & s_1c_3 \\ -s_1c_2 & c_1c_2c_3 - s_2s_3e^{\imath\delta} & c_1c_2s_3 - s_2c_3e^{\imath\delta} \\ s_1s_2 & -c_1s_2c_3 - c_2s_3e^{\imath\delta} & -c_1s_2s_3 + c_2c_3e^{\imath\delta} \end{pmatrix}$$

I valori dei 3 angoli vengono estratti sperimentalmente, e la fase non può essere eliminata (ma si possono ridefinire i campi). Altre parametrizzazioni utlizzate sono la *parametrizzazione standard* e l'approssimazione di Wolfenstein (espansione in serie di $\lambda \equiv s_{12} = \sin\theta_C$).

9 Teoria della rinormalizzazione (cenni)

In QED un elettrone emette un fotone, che a sua volta produce una coppia e^+e^-, e questi emettono fotoni, e così via. Un elettrone risulta quindi circondato da una "nube" di coppie virtuali che, a causa dell'interazione coulombiana, sono polarizzate, ovvero i positroni sono più vicini all'elettrone originario (l'elettrone *nudo*).

A causa di questo fenomeno, la carica misurata (effettiva) non è la "vera" carica dell'elettrone, e decresce con l'allontanarsi dall'elettrone nudo. Quindi la carica osservata *non è una costante*, ma varia in funzione della distanza o dell'impulso trasferito. Infatti, $\alpha(Q^2) \searrow Q^2 \searrow r \nearrow$.

La teoria della rinormalizzazione, per eliminare delle divergenze nei calcoli perturbativi di ordine superiore al primo, porta a concludere che la carica effettiva, espressa in termini di costante di struttura fine $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$, varia con l'impulso trasferito Q^2 come:

$$\alpha(Q^2) = \frac{\alpha_0}{1+\frac{\alpha_0}{3\pi}\log\frac{\Lambda^2}{Q^2}}$$

Per un valore $Q^2 = \mu^2$ otteniamo che $\alpha(\mu^2) = \frac{1}{137}$ (costante di struttura fine), per cui possiamo scrivere:

$$\alpha(Q^2) = \frac{\alpha(\mu^2)}{1-\frac{\alpha(\mu^2)}{3\pi}\log\frac{Q^2}{\mu^2}}$$

In questo modo $\alpha(Q^2)$ viene espressa in termini di quantità misurabili e non del *cutoff* Λ^2. Nel limite delle basse energie ($Q^2 \to 0$ Coulomb scattering) la carica elettrica rinormalizzata $\frac{e_R^2}{4\pi} = \alpha = \frac{1}{137}$ è:

$$e_R = e\left[1 - \frac{\alpha}{3\pi}\log\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right)\right]$$

Nella QCD le cose si complicano a causa della natura non abeliana di questa interazione. Ponendo per analogia $\alpha_s(Q^2) = \frac{g_s^2}{4\pi}$, risulta che:

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1+\frac{(33-2n_f)\alpha_s(\mu^2)}{12\pi}}\log\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right)$$

Le differenze rispetto al caso QED risiedono nel fatto che i quark hanno 3 colori e che esiste un loop gluonico, mentre i fotoni non possono interagire fra loro. Si possono calcolare quindi due contributi importanti, uno dovuto al loop gluonico e uno dovuto al loop fermionico, ma quest'ultimo va pesato sul numero di quark n_f. Il risultato netto è che nella QCD avviene un anti-screening, e $\alpha_s \searrow Q^2 \nearrow$ e questo fenomeno è chiamato *asymptotic freedom*. Per togliere la dipendenza dal parametro di rinormalizzazione μ^2 si definisce:

$$\Lambda_{QCD} \equiv \mu^2 \exp\left(-\frac{12\pi}{(33-2n_f)\alpha_s(\mu^2)}\right)$$

Per cui:

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{12\pi}{(33-2n_f)\log\frac{Q^2}{\Lambda^2_{QCD}}}$$

Sperimentalmente a $Q^2 \approx 100GeV^2$ $\Lambda^2_{QCD} \approx 200MeV$.
Per alti valori dell'impulso trasferito la QCD può essere trattata perturbativamente.

10 Oltre lo SM

Fino a $\sqrt{s} \sim 100GeV$ il Modello Standard è indubbiamente una buona descrizione dei fenomeni fisici osservati finora. Tuttavia ci sono ottimi motivi per ritenere che questo non rappresenta la descrizione più profonda del microcosmo:

- Non si fanno previsioni numeriche sulla massa delle particelle, nè degli accoppiamenti e di altri importanti parametri (angoli di mixing, etc).
- Non si spiega la struttura a tre generazioni
- In una stessa generazione ci sono due quark e due leptoni, di cui uno massless senza una specifica ragione. In questo modo si ottengono delle cancellazioni importanti, ma perché le cose stanno messe così?
- Non c'è la gravità!
- Perché la carica elettrica appare in multipli di $e/3$?
- Problema della gerarchia: l'unificazione con l'interazione gravitazionale potrebbe avvenire ad un'energia di circa $10^{19}GeV$, ma le particelle più pesanti a noi note hanno masse nell'ordine dei $100GeV$.
- Perché avviene la violazione CP?

11 Grand Unified Theory (GUT)

In questo schema, quark e leptoni sono due manifestazioni di una stessa particella, e questo porta all'unificazione delle interazioni elettrodebole e forte. Questo è giustificato dall'evidenza che con l'aumentare dell'energia di interazione le costanti di accoppiamento g, g' e g_S si avvicinano a $10^{16}GeV$ senza però convergere ad uno stesso valore. Allargando il gruppo di simmetria (e introducendo nuovi vertici nelle interazioni) questo problema viene risolto.

$$SU(5) \stackrel{10^{15}GeV}{\rightarrow} SU(3)_C \bigotimes [SU(2)_L \bigotimes U(1)_Y] \stackrel{10^{2}GeV}{\rightarrow} SU(3)_C \bigotimes U(1)_{EM}$$

Pertanto, serve un altro meccanismo di Higgs che rompa spontaneamente la simmetria $SU(5)$. Questo fa apparire nuovi bosoni vettori.

$$5_R = \begin{pmatrix} d_r \\ d_b \\ d_g \\ e^+ \\ \overline{\nu}_e \end{pmatrix} \quad (5x5)_L = \begin{pmatrix} 0 & \overline{u}_g & \overline{u}_b & u_r & d_r \\ & 0 & \overline{u}_r & u_b & d_b \\ & & 0 & u_g & d_g \\ & & & 0 & e^+ \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

In ciascun multipletto la somma delle cariche elettriche è nulla. In particolare $Q_\nu - Q_e = Q_u - Q_d$ e questo può spiegare la struttura in doppietti. Ancora:

$\sum^5 Q(I_z - Q\sin^2\theta_W) = 0 \Rightarrow \sin^2\theta_W = \frac{\sum QI_3}{Q^2} = \frac{3}{8} = 0.375$

Questo valore è diverso da quello trovato sperimentalmente, ma stiamo lavorando alla scala di unificazione a $10^{15}GeV$! A $91GeV$ le correzioni danno un valore di 0.21, in accordo con gli esperimenti.

Ci saranno bosoni che generano transizioni quark - leptone. Da questo deriva il decadimento del protone. Sperimentalmente $\tau_p > 7 \cdot 10^{32} yr$, mentre in teoria dovrebbe essere inferiore di circa due ordini di grandezza. Si può ricorrere a gruppi di simmetria alternativi, come $SO(10)$, ma anche se la vita media prevista aumenta, essa resta ancora al di sotto dei valori sperimentali.
Le teorie GUT prevedono l'esistenza di monopoli magnetici creatisi all'epoca della rottura di simmetria. La loro massa dovrebbe essere nell'ordine di $m_M \simeq \frac{m_X}{\alpha_{GUT}} = \frac{10^{15}}{0.03} = 3 \cdot 10^{16}GeV$ e si prevede la quantizzazione della carica elettrica come $eg = n\hbar c$ (con n numero naturale). Da qui $g = 68e$ che è un valore gigantesco per la carica magnetica del monopolo. Si prevede inoltre che se c'è stato un periodo di espansione esponenziale (epoca inflazionaria) il numero di monopoli creati dovrebbe essere basso.

Le teorie GUT prevedono la violazione dei numeri barionico e leptonico (ma si conserva $B - L$): unitamente alla violazione CP questo spiegherebbe perché materia e antimateria non sono in perfetto equilibrio.

12 Supersymmetry (SUSY)

La supersimmetria è in grado di risolvere il problema della gerarchia, oltre che della stabilizzazione della massa del bosone di Higgs del MS tramite la cancellazione di una divergenza nei loop ferminici, e apre uno spiraglio verso l'unificazione con la gravità. Le trasformazioni supersimmetriche trasformano fermioni in bosoni e viceversa, per cui nello stesso multipletto appaiono particelle dei due tipi. Questa operazione cambia lo spin di 1/2, ma lascia carica elettrica e di colore inalterate.
Ad ogni particella corrisponde un "partner supersimmetrico", detto sparicella. La necessità di introdurre un nuovo nome deriva dal fatto che nessuno di questi

sembra corrispondere a qualche particella nota: tutte le sparticelle hanno massa notevolmente superiore (nella scala del TeV) a quella delle particelle corrispondenti per poter contribuire a risolvere il problema della gerarchia. Anche in questo quadro sarà necessario invocare un meccanismo di Higgs.
Il modello SUSY più semplice è il MS supersimmetrico minimale (MSSM), nel quale sono presenti, oltre alle particelle note, i gaugini, gli sfermioni di 3 generazioni, due doppietti di Higgs e 5 higgsini (il più leggero dei quali dovrebbe essere trovato abbastanza in fretta ad LHC). Per fare i calcoli basta aggiungere grafici di Feynman con le sparticelle, poichè la supersimmetria non introduce nuove interazioni nè modifica il valore delle costanti di accoppiamento (il running viene influenzato dalla presenza di nuove particelle, che appaiono in nuovi loop). In particolare:

- I partner supersimmetrici sono prodotti in coppie
- Nel decadimento di una sparticella c'è sempre una particella
- La sparticella più leggera (il neutralino $\overset{\sim 0}{\chi_1}$) è stabile e potrebbe rappresentare una soluzione al problema della Materia Oscura.
- Si conserva il numero $R = (-1)^{3B+L+2S}$ detto R-parità. R=+1 per le particelle, R=-1 per le sparticelle.

Anche MSSM però richiede molti (123) parametri *ad hoc*, e non dà indicazioni sulle masse (a parte il fatto che le sparticelle devono avere masse molto grandi).
La SUSY viene attualmente considerata la corsia preferenziale verso la Grande Unificazione: infatti, per un valore grande della scala dell'energia di interazione, le costanti di accoppiamento convergono ad uno stesso punto.

13 Supergravità

Per avere un quadro completo dei fenomeni fisici ci si aspetta di avere un giorno disponibile una formulazione quantistica della gravitazione. Risulta che la teoria quantistica supersimmetrica della gravità possiede un'invarianza di gauge locale, e la si può considerare una teoria "interessante".
Infatti, applicando la supergravità alla SUSY i parametri liberi scendono a solo 5 (massa scalare GUT, massa del gaugino GUT, rapporto dei *void expectation value* dei doppietti di Higgs, parametri del mixing dell'Higgs, mixing GUT stop/sbottom/stau). È ancora da dimostrare se esiste in natura.

14 Modelli Compositi

Secondo queste teorie quark e leptoni sono composti da qualcosa di più piccolo. Pati e Salam proposero il modello a *preoni*, ma ci sono comunque delle diffi-

coltà. Ad esempio, questi "prequark" avrebbero dimensioni inferiori a $10^{-16}m$ e richiederebbero una quinta interazione (anche se in alcuni modelli è la forza gravitazionale a tenerli insieme).
I leptoni compositi potrebbero mostrare stati eccitati che decadono elettromagneticamente ($e^* \rightarrow e\gamma$) e non violano nessun principio di conservazione. Tuttavia, ad oggi non sono ancora stati osservati.
Alternativamente, quark e leptoni della seconda e terza generazione sarebbero stati compositi della prima, per cui si dovrebbero osservare decadimenti che violino leggi di conservazione leptoniche. Tuttavia $\frac{\Gamma(\mu \rightarrow e\nu}{\mu \rightarrow e\nu\nu} < 10^{-19}$, e discorsi analoghi valgono per q^* e ν^*.
Alcune estensioni del MS prevedono l'esistenza di bosoni *leptoquark* che sono tripletti di colore, hanno numero B e L, carica elettrica $\propto e/3$, masse relativamente basse. Si dovrebbero osservare vertici del tipo:

$$e^+e^- \rightarrow e^+qLQ \rightarrow e^+e^-q\overline{q}$$

Tutte le ricerche sperimentali hanno dato per ora esito negativo.

Conclusioni

Il Modello Standard è al giorno d'oggi la migliore teoria per la descrizione del microcosmo. Tuttavia evidenze sperimentali (oscillazione dei neutrini, materia oscura) e questioni teoriche impongono una sua estensione. Negli ultimi venti anni ne sono state proposte moltissime, e nel prossimo futuro grazie ad LHC si potrà far luce sulla fisica alla scala del TeV, forse confermando alcune delle nuove teorie, e sicuramente confutandone molte. Non è neanche da escludersi la possibilità che si finirà per non trovare niente. In tutti questi casi, comunque, è evidente che il lavoro da fare è ancora lungo per ottenere un quadro generale e completo di tutti i fenomeni del microcosmo.