

Massa dei neutrini e oscillazione di flavour

Riccardo Di Sipio

9 aprile 2005

Sommario

In questo articolo verrà discussa l'evidenza sperimentale di una massa non nulla dei neutrini e il conseguente fenomeno dell'oscillazione di flavour. Verranno illustrate problematiche relative all'importanza teorica e alla misura del parametro di oscillazione θ_{13} . Infine, verrà mostrato il legame tra il numero di dimensioni dello spazio-tempo e il fatto che i neutrini massivi siano descrivibili da spinori di Majorana o Weyl-Majorana.

1 Introduzione ed Evidenze Sperimentali

Attualmente ci sono diverse domande fondamentali alle quali i ricercatori stanno tentando di dare una risposta riguardo ai neutrini: hanno massa? Cambiano numero leptonico mentre sono in moto? Partecipano ad interazioni non contemplate dal modello standard? A ben guardare, tali quesiti sono collegati. Il primo scienziato a proporre l'idea che i neutrini potessero avere massa fu Pontecorvo: in questo modo, infatti, era possibile descrivere la cosiddetta *oscillazione di flavour*. Poiché tra le sorgenti di neutrini a noi accessibili la più grande è il Sole (ogni secondo, circa 10^{11} neutrini attraversano 1cm^2 terrestre), le prime osservazioni di neutrini riguardarono proprio i neutrini solari. Questi sono prodotti nelle reazioni di fusione all'interno delle stelle, nelle regioni più interne. Dal momento che i neutrini interagiscono molto debolmente con la materia, essi fuoriescono dagli astri molto più velocemente dei fotoni, che invece subiscono numerosissime interazioni, per cui, studiando i neutrini proveniente da una stella, possiamo cogliere informazioni altrimenti molto difficili da ottenere (i neutrini vengono rilasciati in gran numero anche durante il collasso che precede una supernova). Dal momento che le reazioni che sono previste accadere all'interno del Sole sono ben note[1], e le sezioni calcolabili con buona accuratezza, una misura del flusso di neutrini solari rappresenterebbe un test importante per il modello della fornace nucleare interna agli astri. Tra il 1968 e il 1988 Raymond Davis jr et al. hanno condotto un esperimento costituito da un detector di ^{37}Cl che ha prodotto risultati in conflitto con le predizioni teoriche sul flusso di neutrini solari (questo è il cosiddetto

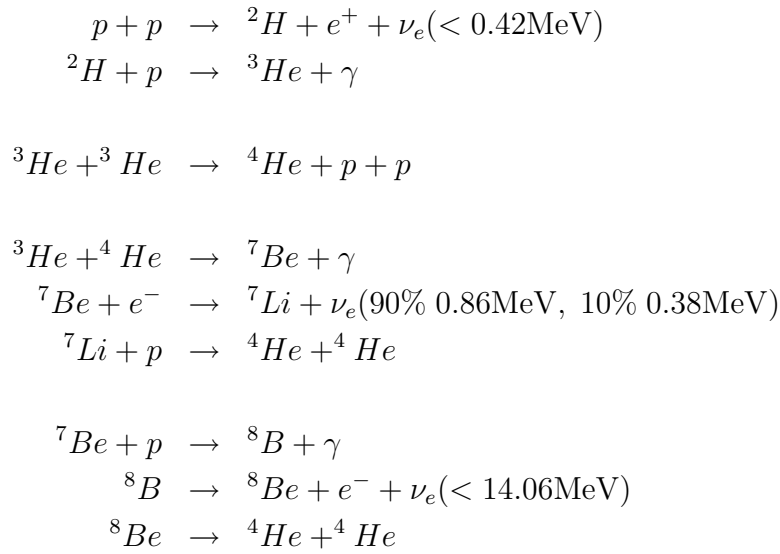
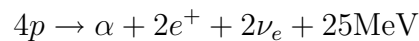


Tabella 1: Ciclo del protone. I neutrini hanno energie di soglia differenti a seconda della reazione che li ha prodotti.

problema dei neutrini solari).

Il problema era particolarmente grave poiché dopo decenni di controlli e revisioni, entrambi i risultati erano considerati robusti. La teoria prevedeva un flusso di $(7.9 \pm 0.9)\text{SNU}$, mentre l'esperimento mostrava un valore di $(2.1 \pm 0.3)\text{SNU}$, circa un terzo di quello previsto¹. Valori più recenti, ottenuti con tecniche differenti da quelle del 1968, sono di $(8.5 \pm 1.8)\text{SNU}$ teorici² contro $(2.6 \pm 0.2)\text{SNU}$ sperimentali³. In un primo momento, ovvero prima dell'esperimento SNO, la spiegazione più accreditata era che gli astrofisici non avessero un buon modello del funzionamento del Sole e delle stelle in generale⁴.

Per quanto ne sappiamo, nel Sole avviene complessivamente la seguente reazione (i cui passaggi intermedi sono illustrati nella Tabella1):



Ogni secondo vengono bruciate circa 600 milioni di tonnellate di idrogeno per dare origine alla luminosità solare, e i fisici hanno lavorato per 50 anni per mettere a punto i dettagli di questo processo.

¹Per entrambi i valori le incertezze sono valutate 1σ

²Bahcall e Pinsonneault, 2004

³Cleveland, Daily, Davis et al., 1998

⁴Nuove misure effettuate nel 1998 delle frequenze di cavità risonante del Sole sono in accordo con le previsioni teoriche, e quindi sono compatibili con le reazioni ipotizzate[3].

Tuttavia, i neutrini prodotti in queste reazioni $p-p$ hanno una energia inferiore a quella misurabile con la tecnica del ^{37}Cl : questa sfrutta i neutrini prodotti da un passaggio della catena di reazioni in cui il ^7Be cattura un p , diventa ^8Be , che è instabile, ed emette infine un positrone, un neutrino e due particelle α . Questi neutrini hanno energie al massimo di 15MeV.

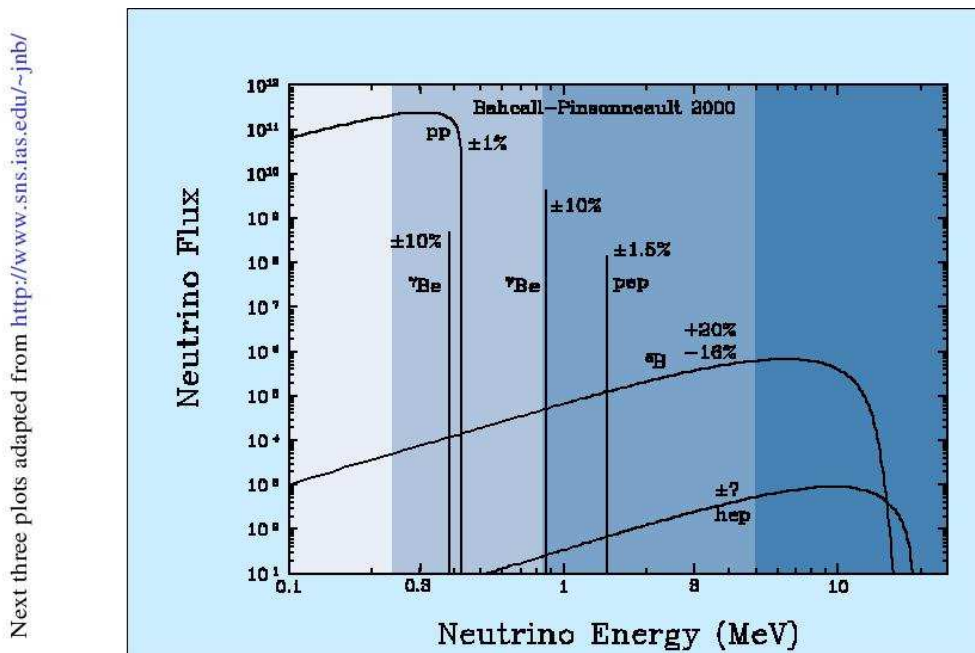
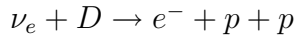


Figura 1: Flusso dei neutrini ed energie di soglia.

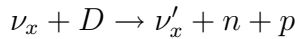
L'esperimento di Davis sfruttava la reazione $\nu_e + ^{37}\text{Cl} \rightarrow e^- + ^{37}\text{Ar}$, che ha un'energia di soglia di 0.8MeV. Una vasca sotterranea (per diminuire il più possibile i rumori di fondo causati dai raggi cosmici) era stata riempita di percloroetilene (C_2Cl_4). Ogni mese, per 20 anni, veniva estratto un campione del liquido che presentava ora ^{37}Ar , tipicamente 15 atomi per ogni campione di 10^{31} atomi. Questo veniva separato chimicamente dal percloroetilene e se ne misurava la presenza con contatori proporzionali. L'efficienza di estrazione raggiungeva il 90%. Le misurazioni effettuate scatenarono l'interesse dei ricercatori, che si operarono per mettere in piedi gli esperimenti Kamiokande (un rivelatore Cerenkov ad acqua per lo scattering $\nu-e$, in Giappone), SAGE, GALLEX (detector radiochimici con ^{71}Ga , il primo in Russia, il secondo in Italia), Super-Kamiokande (una versione più grande di Kamiokande), ed infine SNO (che utilizzava acqua pesante). In particolare, GALLEX e SAGE, sfruttando la reazione $\nu_e + ^{71}\text{Ga} \rightarrow e^- + ^{71}\text{Ge}$ che ha una soglia di 0.23MeV, hanno dato la possibilità di osservare anche i neutrini provenienti dalla reazione $p-p$, che sono più numerosi. GALLEX e SAGE hanno dato risultati compatibili.

È stato però l'esperimento SNO (Solar Neutrino Observatory) a dare informazio-

ni innovative al problema. Infatti, questo esperimento era in grado di osservare due reazioni che gli altri non riuscivano a rivelare:



che avviene *solo* per neutrini elettronici, e



che invece riguarda tutti i tre tipi di neutrini (correnti neutre). Il risultato importante è che, tranne per le correnti neutre, tutti gli altri risultati sono in disaccordo con le previsioni del modello standard.

Nel 2001 è stato annunciato che, combinando i risultato di SNO e dello scattering elettrone-neutrino di Superkamiokande, era stato possibile risolvere il problema dei neutrini solari. Circa due terzi dei ν_e prodotti nel Sole dal 8B si trasformano in ν_μ e ν_τ , che sono più difficili da osservare perché, alle energie di osservazione, hanno una sezione d'urto per lo scattering con l'elettrone circa sette volte più piccola di quella del ν_e . Il flusso *totale* dei tre flavour di neutrini è sperimentalmente compatibile con quello previsto dal modello standard[1]. L'oscillazione di flavour spiega il perché di un minore flusso osservato con esperimenti radiochimici: questi misurano solo il flusso di ν_e . Invece, gli esperimenti basati sullo scattering con l'elettrone misurano principalmente, ma non esclusivamente, le interazioni con i ν_e .

$$\begin{aligned}\Phi^{CC}(\nu_e) &= (1.75 \pm 0.24) \times 10^6 \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1} \\ \Phi_{\text{SNO}}^{ES}(\nu_x) &= (2.39 \pm 0.50) \times 10^6 \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1} \\ \Phi_{\text{SK}}^{ES}(\nu_x) &= (2.38 \pm 0.08) \times 10^6 \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1} \\ \Delta\Phi = \Phi^{ES}(\nu_x) - \Phi^{CC}(\nu_e) &= (0.57 \pm 0.17) \times 10^6 \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}\end{aligned}$$

Tabella 2: Flusso di neutrini non elettronici

$\nu_e + p \rightarrow p + p + e^-$	Buona misura dello spettro dei soli ν_e	Debole sensibilità direzionale $\propto 1 - \frac{1}{3} \cos \theta$
$\nu_x + D \rightarrow p + n + \nu_x$	Misura il flusso totale dei ν di 8B dal sole	Sezione d'urto uguale per tutti i flavour
$\nu_x + e^- \rightarrow \nu_x + e^-$	Alta sensibilità direzionale, misurabile per tutti i flavour	Bassa statistica

Tabella 3: Reazioni misurate da SNO

I risultati di SNO e di Superkamiokande sono di fondamentale importanza per due ragioni:

1. È stata dimostrata sperimentalmente l'esistenza di una fisica oltre il modello standard;
2. È stato confermato sperimentalmente il modello di funzionamento delle stelle.

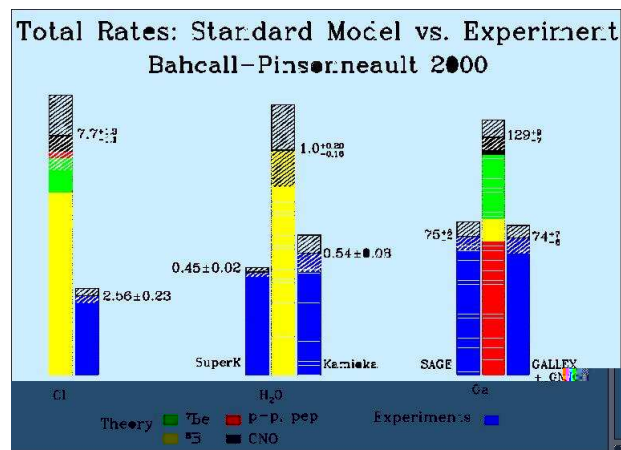


Figura 2: Neutrini misurati dai vari esperimenti. Confronto con le predizioni teoriche.

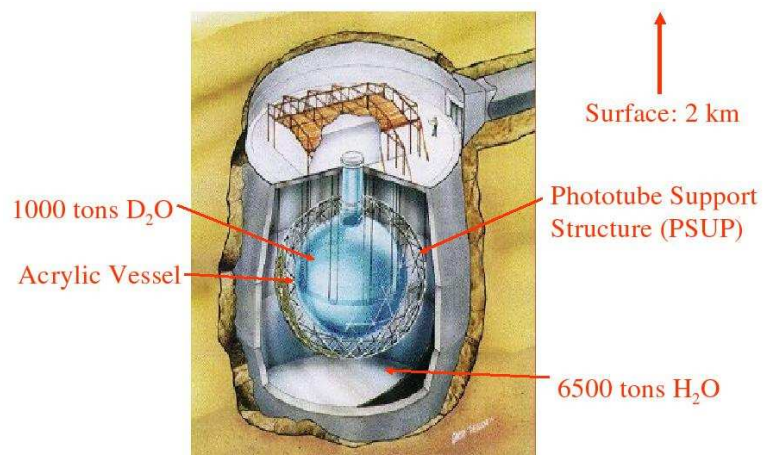


Figura 3: Schema del rivelatore SNO.

2 Oscillazione dei Neutrini

I neutrini sono prodotti nelle reazioni deboli e sono descritti dagli autostati deboli $|\nu_e\rangle, |\nu_\mu\rangle, |\nu_\tau\rangle$. La propagazione avviene tramite gli autostati di massa (ovvero dell'hamiltoniana), ai quali assegnamo i nomi $|\nu_1\rangle, |\nu_2\rangle, |\nu_3\rangle$, che sono diversi dagli autostati deboli. Per cui, esprimiamo gli autostati deboli come combinazioni lineari degli autostati di massa⁵. La propagazione sarà di erente se le masse sono diverse, e durante la propagazione ci sarà una di erenza di fase tra i flavour[3].

Consideriamo per ora solo due tipi di neutrini e calcoliamo la propagazione nel tempo:

$$i \frac{d|\nu(t)\rangle}{dt} = \mathcal{H} |\nu(t)\rangle \quad \text{dove} \quad |\nu(t)\rangle = (\nu_1, \nu_2) \quad (1)$$

\mathcal{H} è una matrice 2x2 diagonale, con elementi $\mathcal{H}_{ii} = \sqrt{p^2 + m_i^2} \simeq E_\nu + \frac{m_i^2}{2E_\nu}$

Sostituendo questa espressione per la hamiltoniana otteniamo:

$$i \frac{d|\nu(t)\rangle}{dt} = \left(E_\nu + \frac{m_i^2}{2E_\nu} \right) |\nu(t)\rangle$$

Per cui le singole componenti risultano essere:

$$|\nu_i(t)\rangle = e^{i\omega_i t} |\nu(0)\rangle \quad \text{dove:} \quad \omega_i = \left(E_\nu + \frac{m_i^2}{2E_\nu} \right) \quad (2)$$

Da questo, tra due istanti successivi c'è una di erenza di fase pari a:

$$\boxed{\Delta\Phi_i = \frac{m_2^2 - m_1^2}{2E_\nu} t} \quad (3)$$

Esprimiamo gli autostati deboli come combinazioni lineari di autostati di massa:

$$|\nu_e\rangle = \cos \theta |\nu_1\rangle + \sin \theta |\nu_2\rangle \quad (4)$$

$$|\nu_\mu\rangle = -\sin \theta |\nu_1\rangle + \cos \theta |\nu_2\rangle \quad (5)$$

⁵Questa soluzione al problema dei neutrini solari prende il nome di *effetto MSW* dal nome dei suoi teorizzatori: Mikheyev, Smirnov e Wolfenstein.

Usando l'espressione 2 otteniamo le seguenti relazioni:

$$|\nu_e(t)\rangle = \cos \theta e^{i\omega_1 t} |\nu_1(0)\rangle + \sin \theta e^{i\omega_2 t} |\nu_2(0)\rangle \quad (6)$$

$$|\nu_\mu(t)\rangle = -\sin \theta e^{i\omega_1 t} |\nu_1(0)\rangle + \cos \theta e^{i\omega_2 t} |\nu_2(0)\rangle \quad (7)$$

$$|\nu_e(0)\rangle = \cos \theta |\nu_1(0)\rangle + \sin \theta |\nu_2(0)\rangle \quad (8)$$

$$|\nu_\mu(0)\rangle = -\sin \theta |\nu_1(0)\rangle + \cos \theta |\nu_2(0)\rangle \quad (9)$$

Invertendo:

$$|\nu_1(0)\rangle = \cos \theta |\nu_e(0)\rangle - \sin \theta |\nu_\mu(0)\rangle \quad (10)$$

$$|\nu_2(0)\rangle = \sin \theta |\nu_e(0)\rangle + \cos \theta |\nu_\mu(0)\rangle \quad (11)$$

Ora, se prepariamo due stati puri, ad esempio di neutrini muonici:

$$|\nu_1(0)\rangle = -\sin \theta |\nu_\mu(0)\rangle \quad (12)$$

$$|\nu_2(0)\rangle = \cos \theta |\nu_\mu(0)\rangle \quad (13)$$

Possiamo esprimere la dipendenza temporale di $|\nu_\mu\rangle$ nel seguente modo:

$$\boxed{|\nu_\mu(t)\rangle = \sin^2 \theta |\nu_\mu(0)\rangle e^{-i\omega_1 t} + \cos^2 \theta |\nu_\mu(0)\rangle e^{i\omega_2 t}} \quad (14)$$

Ora vogliamo calcolare la probabilità di osservare un neutrino muonico ad un istante t :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\nu_\mu\nu_\mu}(t) &\equiv |\langle \nu_\mu(0) | \nu_\mu(t) \rangle|^2 \\ &= \sin^4 \theta + \cos^4 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \theta (e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} + e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t}) \\ &= 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \left[\frac{(\omega_1 - \omega_2)t}{2} \right] \end{aligned}$$

Usando $\omega_i = \left(E_\nu + \frac{m_i^2}{2E_\nu} \right)$ otteniamo un'espressione per la probabilità come funzione della massa dei neutrini e della loro energia:

$$\mathcal{P}_{\nu_\mu\nu_\mu}(t) = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \left[\frac{(m_2^2 - m_1^2)t}{4E_\nu} \right] \quad (15)$$

Possiamo eseguire delle sostituzioni per semplificare ulteriormente questa espressione:

Distanza percorsa	$L = ct$	Km
Differenza di massa quadratica	$\Delta M^2 = m_2^2 - m_1^2$	eV^2
Energia dei neutrini	E_ν	GeV

Pertanto:

$$\mathcal{P}_{\nu_\mu\nu_\mu}(t) = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \left[1.27 \frac{\Delta M^2 \cdot L}{E_\nu} \right] \quad (16)$$

$$\mathcal{P}_{\nu_\mu\nu_e}(t) = \sin^2 2\theta \sin^2 \left[1.27 \frac{\Delta M^2 \cdot L}{E_\nu} \right] \quad (17)$$

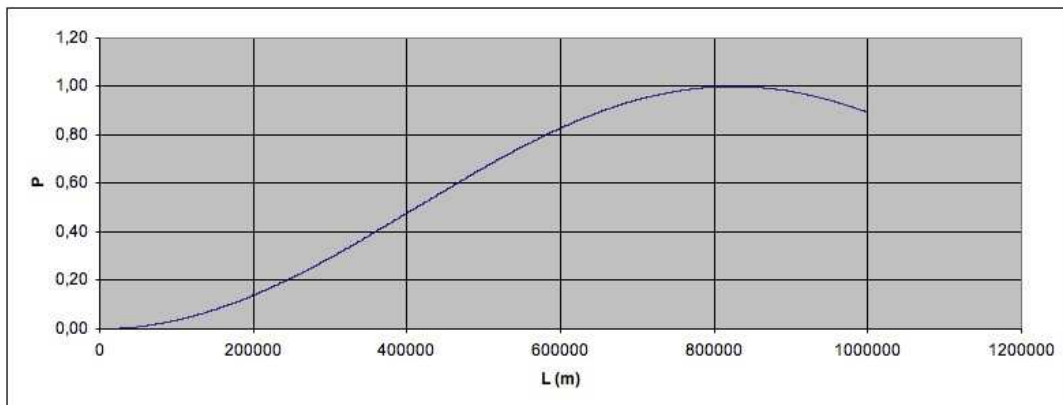


Figura 4: Probabilità di oscillazione in funzione di L, con $\theta = 45^\circ$, $\Delta m^2 = 0.003$, $E = 2GeV$.

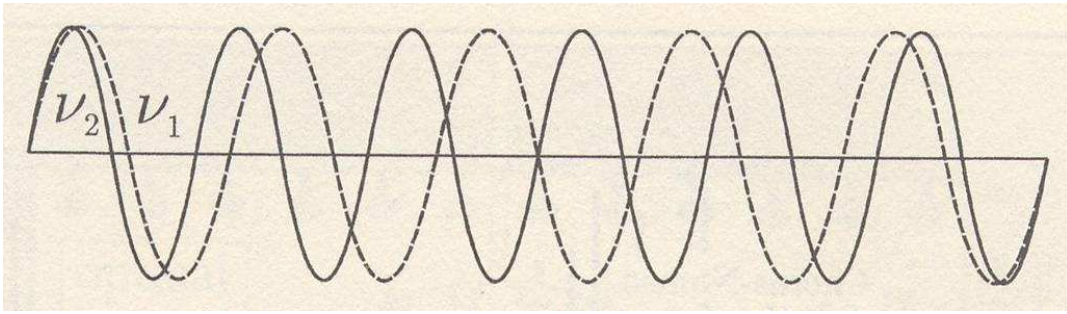


Figura 5: Oscillazione di flavour per $\theta = \pi/4$.

Come si puo' vedere in Fig.5, agli estremi si osserva $|\nu_\mu\rangle$, mentre per al centro si osserva un $|\nu_e\rangle$, perché le due funzioni d'onda sono in opposizione di fase.

Sperimentalmente (Bahacall, Gonzalez-Garcia e Peña-Garai, 2004):

$$\begin{aligned}\Delta m^2 &= (8.2 \pm 0.3) \times 10^{-5} \text{eV}^2 \\ \tan \theta_{12} &= 0.39_{-0.04}^{+0.05}\end{aligned}$$

Per quanto riguarda i flussi di neutrini $p - \bar{p}$ e 8B , espressi in unità previste dal modello standard:

$$\begin{aligned}\Phi(p - \bar{p}) &= 1.01 \pm 0.02^{\text{exp}} \pm 0.01^{\text{th}} \\ \Phi({}^8B) &= 0.87 \pm 0.04^{\text{exp}} \pm 0.23^{\text{th}}\end{aligned}$$

Le incertezze sono $\pm 1\sigma$

3 Neutrini del τ e Oscillazioni a Tre Flavour

È opportuno citare un esperimento in atto, che si prefige di inviare un fascio di neutrini prodotti al CERN di Ginevra, di tipo, intensità ed energia noti, verso il Laboratorio Nazionale del Gran Sasso, in Italia, ad una distanza di 732 Km (Fig.6). Questo dovrebbe permettere una misura più precisa dei parametri di oscillazione. Esperimenti simili sono previsti anche in Giappone (KamLAND) e negli USA (FNAL). Inoltre, si spera di poter rivelare la presenza di neutrini del τ : a causa della vita media estremamente breve della particella τ , i segnali emessi dal decadimento di questa si perdono nel fondo dei segnali dei muoni. L'esperimento statunitense invece si prefige di misurare la diminuzione del flusso di ν_μ , attribuendo questo fenomeno all'apparizione di ν_τ durante l'oscillazione. Anche in questo caso la distanza tra la sorgente e il rivelatore è di circa 700Km.

L'oscillazione dei neutrini delle tre generazioni è completamente descritta da 6 parametri indipendenti:

- 2 differenze quadratiche di massa ($\Delta M_{12}^2, \Delta M_{23}^2$)
- 3 angoli di mixing ($\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}$)
- 1 fase di violazione CP (δ)

Di questi parametri, quello conosciuto con la maggiore indeterminazione è θ_{13} . Infatti, ΔM_{12}^2 e $\sin^2 \theta_{12}$ vengono misurati tramite i neutrini solari⁶, ΔM_{23}^2 e θ_{23} tramite i neutrini atmosferici⁷[2]. Per quanto riguarda θ_{13} , per ora si sa solo che ha un valore molto piccolo dagli esperimenti CHOOZ ($\sin^2 2\theta_{13} \leq 0.16$ (0.25)) e Palo Verde ($\sin^2 \theta_{13} \leq 0.053$ (0.066)).

Al momento gli esperimenti riescono a misurare solo oscillazioni tra due flavour, ma misure più precise in futuro potranno permettere una verifica più accurata delle oscillazioni a tre flavour: questo sarebbe molto importante poiché l'oscillazione a tre flavour avviene solo se θ_{13} ha un valore finito. Ancora, se avvengono oscillazioni a *tre* flavour, allora sono possibili violazioni CP leptoniche⁸.

Sebbene sia più semplice illustrare i risultati più importanti sull'oscillazione di neutrini ricorrendo ad un "mondo a due flavour", questa descrizione risulta insufficiente per futuri esperimenti in cui vorremmo rivelare oscillazioni tra tre flavour. La probabilità di transizione tra flavour è generalizzabile nel seguente modo:

$$\mathcal{P}(\nu_{f_l} \rightarrow \nu_{f_m}) = \underbrace{\delta_{lm} - 4 \sum_{i>j} \text{Re} J_{ij}^{f_l f_m} \sin^2 \Delta_{ij}}_{P_{CP}} - 2 \underbrace{\sum_{i>j} \text{Im} J_{ij}^{f_l f_m} \sin^2 \Delta_{ij}}_{P_{\cancel{CP}}} \quad (18)$$

⁶ $\Delta M_{12}^2 = 6.9_{-1.5}^{+2.6} \times 10^{-5} \text{eV}^2$, $\sin^2 \theta_{12} = 0.3_{-0.07}^{+0.09}$ a 3σ

⁷ $\Delta M_{23}^2 = 2.0_{-0.9}^{+1.2} \times 10^{-3} \text{eV}^2$, $\theta_{23} \approx 45^\circ$ a 3σ

⁸La matrice di mixing per due flavour ha elementi reali. Con tre acquista una fase complessa.

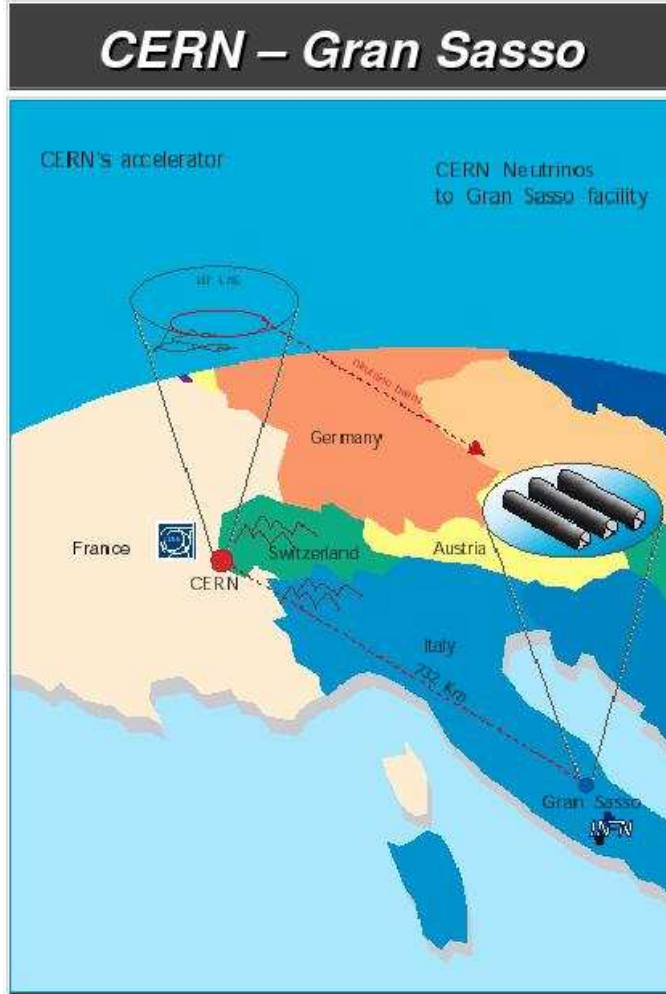


Figura 6: Fascio di neutrini inviato dal CERN (Ginevra) verso il Laboratorio Nazionale del Gran Sasso (Abruzzo).

Dove $\Delta_{ij} = \frac{\Delta M_{ij}^2 L}{4E}$, $J_{ij}^{f_l f_m} = U_{li} U_{lj}^* U_{mi}^* U_{mj}$ dopo aver definito:

$$U = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad (19)$$

con $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ e $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$.

La matrice più generale per tre neutrini di Majorana conterrebbe altre due fasi CP, ma queste non appaiono nella formula di oscillazione. Inoltre, le probabilità di sparizione, cioè le transizioni $\nu_{f_l} \rightarrow \nu_{f_l}$, non dipendono da δ poiché $J_{ij}^{f_l f_m}$ è solo funzione dei moduli degli elementi di U . Pertanto, le transizioni del tipo $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$, che sono legate alla probabilità di apparizione, sono indicate per studiare le vio-

lazioni CP leptoniche.

Nell'Eq.18 appaiono due contributi, uno che viola CP, l'altro no; entrambi dipendono da δ . Si potrebbe pensare di isolare delle asimmetrie CP, tuttavia gli esperimenti finora effettuati non sono avvenuti nel vuoto, e la presenza di materia conduce a violazioni di CP di per sè, rendendo questa misura molto complicata. Ad ogni modo, è possibile scrivere una hamiltoniana che rappresenti l'oscillazione di tre neutrini nella materia, e tramite questa calcolare le probabilità di apparizione e sparizione. Si vede quindi che queste espressioni dipendono esplicitamente da θ_{13}

4 Neutrini di Dirac e neutrini di Majorana

Elettroni e protoni non sono l'antiparticella di se stessi, poiché sono elettricamente carichi. Per i neutroni il discorso è simile, dal momento che hanno un numero barionico. Per i neutrini, invece, la questione è più complicata, dal momento che ci sono dubbi sulla reale esistenza del numero leptonico[4]. In generale, nelle teorie GUT si richiede che i neutrini siano massivi, e in questo caso bisogna anche dare una spiegazione del fatto sperimentale che questa sia così piccola paragonata a quella di tutte le altre particelle note. Una spiegazione di questo è nota come *see-saw mechanism*, secondo la quale le masse dei neutrini m_ν obbediscono ad una relazione del tipo $m_\nu M \approx [\text{massa tipica dei quark o dei leptoni carichi}]^2$.

Quando si dice che un neutrino e un antineutrino sono la stessa particella, si intende che:

$$CPT |\nu(\vec{p}, h)\rangle = \eta_{CPT}^h |\nu(\vec{p}, -h)\rangle \quad (20)$$

Dove \vec{p} è l'impulso della particella, h l'elicità (che cambia di segno a causa dell'operatore di parità P) e η_{CPT}^h è il fattore di fase CPT , che dipende dall'elicità. Se il neutrino non è la sua stessa antiparticella, allora le particelle $\nu(\vec{p}, h)$ e $\bar{\nu}(\vec{p}, h)$ con una stessa elicità sono due oggetti differenti. In questo caso, si parla di *neutrini di Dirac*: nel sistema di riferimento della particella, questi hanno quattro stati, due stati di spin per la particella, e due per l'antiparticella.

Se invece neutrino e antineutrino corrispondono, allora $\nu(\vec{p}, h)$ e $\bar{\nu}(\vec{p}, h)$ sono identici, e per stesse elicità e impulso hanno uguali interazioni con la materia. In questo caso si parla di *neutrini di Majorana*: nel sistema di riferimento della particella, questi hanno due stati, riferiti alle due possibili proiezioni dello spin lungo la direzione del moto.

Sperimentalmente si possono produrre solo neutrini polarizzati, e in particolare i neutrini sono *sempre* polarizzati inversamente rispetto agli antineutrini. Quelli che chiamiamo neutrini risultano sempre *left-handed*, mentre quelli che chiamiamo antineutrini sono sempre *right-handed*. Di sicuro, questi interagiscono diversamente con la materia, ma per risolvere il problema bisognerebbe poter invertire la polarità di uno dei due e confrontarli. Purtroppo, non si è ancora riusciti a trovare un modo per farlo. D'altra parte, se il neutrino fosse massless questa operazione sarebbe impossibile: secondo il modello standard non esistono correnti right, e diventa inutile chiedersi quale sia il comportamento di $\bar{\nu}_\mu(-)$. Se CP è conservata, allora un neutrino di Majorana verifica le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} CPT |\nu^M(\vec{p}, h)\rangle &= \eta_{CPT}^h |\nu^M(\vec{p}, -h)\rangle \\ CP |\nu^M(\vec{p}, h)\rangle &= \eta_{CP} |\nu^M(-\vec{p}, -h)\rangle \end{aligned}$$

Consideriamo il decadimento $Z^0 \rightarrow \nu\nu$. Secondo il modello standard, questo decadimento conserva CP . Se i neutrini hanno massa, possiamo immaginare che i neutrini prodotti possano essere non relativistici; essendo questi fermioni, devono necessariamente occupare uno stato (antisimmetrico) 3P_1 con momento angolare totale pari a quello dello Z^0 iniziale.

$$CP |\nu\nu; {}^3P_1\rangle = \eta_{CP}^2(\nu)(-1)^L |\nu\nu; {}^3P_1\rangle = -\eta_{CP}^2(\nu) |\nu\nu; {}^3P_1\rangle$$

Dal momento che Z^0 ha $CP = +1$, la conservazione di CP implica che $-\eta_{CP}^2(\nu) = 1$ ovvero che:

$$\eta_{CP}(\nu) = \pm i \quad (21)$$

Una buona illustrazione dei problemi relativi all'elicità dei neutrini è data dal decadimento dei pioni carichi:

$$\begin{aligned} \pi^+ &\rightarrow \mu^+ + \nu_\mu(-) \\ \pi^- &\rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu(+)$$

Poi, indicando con N un nucleone, possono avvenire soltanto le seguenti reazioni:

$$\begin{aligned} \nu_\mu(-) + N &\rightarrow \mu^- + X \\ \bar{\nu}_\mu(+) + N &\rightarrow \mu^+ + X \end{aligned}$$

Questo fenomeno può avere due spiegazioni:

1. ν e $\bar{\nu}$ hanno semplicemente polarizzazione di erente.
2. Esiste un numero leptonico L che si conserva, tale che $L(\nu_\mu) = L(\mu^-) = +1$ mentre $L(\bar{\nu}) = L(\mu^+) = -1$, per cui altre reazioni sono proibite, e ν e $\bar{\nu}$ sono intrinsecamente particelle diverse.

È stato ipotizzato un esperimento che potrebbe decidere se i neutrini sono di Dirac o di Majorana⁹, e questo è il *doppio decadimento beta senza neutrini* ($\beta\beta_{0\nu}$). La reazione è $(A, Z) \rightarrow (A, Z+2) + 2e^-$, ed avviene tramite l'emissione di due W^- virtuali che decadono a loro volta, scambiandosi un neutrino virtuale ed emettendo due elettroni. Nel vertice in cui il neutrino viene emesso, esso si comporta da antineutrino, mentre in quello dove viene assorbito, da neutrino. Per cui il

⁹Anche se la loro massa è inferiore a 1eV.

diagramma sparisce a meno che $\nu = \bar{\nu}$. Ma anche in questo caso, il contributo è nullo a causa delle diverse elicità. Se il neutrino è però di Majorana, questo verrà emesso *left-handed* con una certa probabilità, e quindi assorbito senza ulteriori soppressioni.

Scegliendo nuclei β -stabili, non ci sono meccanismi concorrenti al doppio decadimento beta senza neutrini (in effetti c'è un effetto concorrente, ma questo è circa sei ordini di grandezza meno probabile del $\beta\beta_{0\nu}$, ammesso che quest'ultimo possa avvenire).

Al giorno d'oggi[4] però non è stato ancora osservato nessun doppio decadimento beta senza neutrini. Questo pone dei limiti superiori alla massa del neutrino, il più stringente dei quali[4] è di 0.46eV dal decadimento del ^{76}Ge .

5 Algebra di Cli ord, Spinori e Dimensioni dello Spazio

Originariamente, Cli ord costruì l'algebra che porta ora il suo nome per generalizzare quella dei quaternioni di Hamilton. Un insieme di n elementi costituisce un'algebra di Cli ord C_n se[5]:

$$\begin{aligned} e_i^2 &= 1 \\ \{e_i, e_j\} &= 2\delta_{ij} \end{aligned}$$

Ad esempio, se in uno spazio vettoriale ortonormale consideriamo la seguente operazione tra vettori (detta *prodotto geometrico*[6]):

$$\vec{a}\vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \times \vec{b} \quad (22)$$

Si vede facilmente che l'anticommutatore $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ è nullo per l'ortogonalità dei vettori (per la quale il prodotto scalare dei vettori è nullo) e per l'antisimmetria del prodotto vettoriale.

Ad esempio, G_0 ha la stessa algebra dei numeri reali \mathbb{R} , G_1 quella dei complessi \mathbb{C} (infatti $e_1^2 = -1$), G_2 quella dei quaternioni \mathbb{H} . La definizione dell'algebra di Cli ord può essere estesa a spazi con metrica mista, come ad esempio lo spaziotempo di Minkowski. Se si hanno m elementi con norma negativa e n con norma positiva, scriveremo semplicemente $G_{m,n}$. L'algebra di Cli ord sullo spaziotempo di Minkowski è pertanto $G_{3,1}$ (oppure $G_{1,3}$ con la segnatura $-, +, +, +$), e questa ha la stessa algebra delle matrici γ di Dirac. Pertanto, è possibile usare quest'algebra per descrivere fermioni in un numero arbitrario di dimensioni. Inoltre, si può scegliere di usare $G_{n-1,1}$ oppure $G_{1,n-1}$, ma le due rappresentazioni non sono identiche:

$G_{0,1}$	$\mathbb{R} + \mathbb{R}$	$C_{1,0}$	\mathbb{C}
$G_{1,1}$	$\mathbb{R}(2)$	$G_{1,1}$	$\mathbb{R}(2)$
$G_{2,1}$	$\mathbb{C}(2)$	$G_{1,2}$	$\mathbb{R}(2) + \mathbb{R}(2)$
$G_{3,1}$	$\mathbb{H}(2)$	$G_{1,3}$	$\mathbb{R}(4)$
$G_{4,1}$	$\mathbb{H}(2) + \mathbb{H}(2)$	$G_{1,4}$	$\mathbb{C}(4)$
$G_{5,1}$	$\mathbb{H}(4)$	$G_{1,5}$	$\mathbb{H}(4)$
$G_{6,1}$	$\mathbb{C}(8)$	$G_{1,6}$	$\mathbb{H}(4) + \mathbb{H}(4)$
$G_{7,1}$	$\mathbb{R}(16)$	$G_{1,7}$	$\mathbb{H}(8)$

Tabella 4: Algebre di Cli ord su spazi di Minkowski.

Questa notazione vuol dire che una rappresentazione dell'algebra $G_{1,3}$ è costituita da matrici reali 4×4 , ma $G_{3,1}$ è costituita da matrici di quaternioni 2×2 . La tabella si ferma a spazi di Minkowski 8-dimensionali perché si verifica una sorta di ripetizione, detta *periodicità di Bott*, ovvero le matrici 16×16 di $G_{n+8,1}$ hanno la stessa algebra di quelle di $G_{n,1}$, e quelle di $G_{1,n+8}$ la stessa di $G_{1,n}$. Si possono descrivere gli stessi fermioni in 2 dimensioni, oppure 10, 18, 26, ecc..[5]

Esistono diversi tipi di spinori: quelli di *Dirac* descrivono fermioni che possono presentare entrambe le chiralità, e non sono l'antiparticella di se stesse (es: elettrone); quelli di *Weyl* descrivono fermioni che hanno una sola chiralità intrinseca, e non sono l'antiparticella di se stesse (es: neutrini secondo il modello standard). È interessante notare che gli spinori di Weyl appaiono solo in teorie fondate in uno spazio a dimensioni pari.

Questi primi due tipi di spinori sono complessi, nel senso che le loro componenti sono a valori complessi, ma si possono anche utilizzare spinori reali: questi sono utilizzati per descrivere fermioni che sono l'antiparticella di se stessi (infatti, l'operazione di coniugazione di carica avviene tramite la coniugazione complessa). Per cui gli spinori di *Majorana* descrivono fermioni che possono presentare entrambe le chiralità e sono l'antiparticella di se stessi, mentre gli spinori di *Majorana - Weyl* descrivono fermioni con chiralità intrinseca e sono l'antiparticella di se stessi. Al momento non sono ancora stati osservati con certezza fermioni che possano essere descritti da spinori di Majorana o di Majorana - Weyl, ma se il neutrino ha massa potrebbe essere descritto da uno spinore di Majorana[5]. Anche in questo caso è interessante notare che gli spinori reali possono esistere solo in spazi di dimensione $8k + 2$.¹⁰

Come il gruppo delle rotazioni $SO(n)$ ha un *doppio ricoprimento* denominato $Spin(n)$ per $n > 2$ (ad esempio, $Spin(3) = SU(2)$, $Spin(4) = SU(2) \times SU(2)$), così il gruppo di Lorentz sullo spazio di Minkowski n -dimensionale $SO(n-1,1)$ ha un doppio ricoprimento $Spin(n-1,1)$. Gli spinori in questione sono appunto una rappresentazione di questo gruppo: infatti, ogni rappresentazione di $G_{n-1,1}$ e $G_{1,n-1}$ è anche rappresentazione di $Spin(n-1,1)$. Si possono utilizzare rappresentazioni reali o complesse. In precedenza abbiamo considerato $G_{m,n}$ costituito da combinazioni lineari a coefficienti *reali* di prodotti degli elementi e_i , ma è possibile utilizzare coefficienti complessi. In questo modo si ottiene un'algebra *complessificata* di Cliford. Poiché in un'algebra complessificata c'è già l'unità immaginaria i , la complessificazione di $G_{m,n}$ dipende solo da $p + q$ e non da quanti elementi a norma negativa ci sono. Ad esempio, complessificando \mathbb{R} si ottiene \mathbb{C} , complessificando \mathbb{C} si ottiene $\mathbb{C} + \mathbb{C}$, complessificando \mathbb{H} si ottiene $\mathbb{C}(2)$. Questo è

¹⁰Alcune teorie di gauge supersimmetriche funzionano solo in spazi di dimensione 3,4,6,10. In queste dimensioni la teoria funziona anche classicamente, ma la sua versione quantistica necessita di 10 dimensioni per non essere contraddittoria.

interessante, anche perché si può dimostrare che $\text{Spin}(n)$ è riducibile se n è pari, e i due sottospazi invarianti sono gli spinori left-handed e right-handed, ognuno di dimensione $2^{n/2-1}$. Naturalmente, c'è sempre una rappresentazione n -dimensionale di $\text{Spin}(n)$, derivante dalla rappresentazione vettoriale n -dimensionale di $\text{SO}(n)$.

Dimensione	Algebra di Cli ord complessificata	Spinori di Dirac
1	$\mathbb{C} + \mathbb{C}$	\mathbb{C}
2	$\mathbb{C}(2)$	\mathbb{C}^2
3	$\mathbb{C}(2) + \mathbb{C}(2)$	\mathbb{C}^2
4	$\mathbb{C}(4)$	\mathbb{C}^4
5	$\mathbb{C}(4) + \mathbb{C}(4)$	\mathbb{C}^4
6	$\mathbb{C}(8)$	\mathbb{C}^8
7	$\mathbb{C}(8) + \mathbb{C}(8)$	\mathbb{C}^8
8	$\mathbb{C}(16)$	\mathbb{C}^{16}

Tabella 5: Algebre di Cli ord complessificate e Spinori di Dirac.

Come si può facilmente notare, le algebre complessificate di Cli ord hanno periodo 2 invece che 8. Gli spinori di Dirac corrispondono alla rappresentazione complessa più piccola di un'algebra di Cli ord complessificata¹¹. Ora non ci resta che trovare le rappresentazioni reali più piccole di $G_{n-1,1}$ e $G_{1,n-1}$. Considerato che \mathbb{R} ha la rappresentazione più piccola su \mathbb{R} stesso, \mathbb{C} su \mathbb{R}^2 , \mathbb{H} su \mathbb{R}^4 , possiamo compilare la seguente tabella:

Dim	$G_{n-1,1}$	Rappr più piccola		$G_{1,n-1}$	Rappr più piccola	
1	$\mathbb{R} + \mathbb{R}$	\mathbb{R}	Maj	\mathbb{C}	\mathbb{R}^2	
2	$\mathbb{R}(2)$	\mathbb{R}^2	Maj	$\mathbb{R}(2)$	\mathbb{R}^2	Maj
3	$\mathbb{C}(2)$	\mathbb{R}^4		$\mathbb{R}(2) + \mathbb{R}(2)$	\mathbb{R}^2	Maj
4	$\mathbb{H}(2)$	\mathbb{R}^8		$\mathbb{R}(4)$	\mathbb{R}_4	Maj
5	$\mathbb{H}(2) + \mathbb{H}(2)$	\mathbb{R}^8		$\mathbb{C}(4)$	\mathbb{R}^8	
6	$\mathbb{H}(4)$	\mathbb{R}^{16}		$\mathbb{H}(4)$	\mathbb{R}^{16}	
7	$\mathbb{C}(8)$	\mathbb{R}^{16}		$\mathbb{H}(4) + \mathbb{H}_4$	\mathbb{R}^{16}	
8	$\mathbb{R}(16)$	\mathbb{R}^{16}	Maj	$\mathbb{H}(8)$	\mathbb{R}^{32}	

Tabella 6: Rappresentazioni più piccole delle algebre di Cli ord.

¹¹Dove ce ne sono due, come nel caso $\mathbb{C}(n) + \mathbb{C}(n)$, le rappresentazioni di $\text{Spin}(n-1,1)$ che si ottengono usando una delle due sono equivalenti; il "vero" spinore di Dirac è in effetti $\text{Spin}(n-1,1)$.

E questo schema, come detto in precedenza, si ripete con periodo 8. In alcuni casi gli spinori di Dirac o di Majorana sono rappresentazioni *riducibili* di $\text{Spin}(1, n-1)$. Per esempio, per quelli di Dirac ciò accade in dimensioni *pari*, perché $\Gamma_5 = e_1 \dots e_n$ commuta con tutti gli elementi dell'algebra¹². A seconda delle dimensioni, $(\Gamma_5)^2 = \pm 1$, quindi possiamo suddividere lo spazio degli spinori di Dirac nei due autospazi corrispondenti ai due autovalori (in 4 dimensioni abbiamo i due spinori di Weyl che descrivono i neutrini nel Modello Standard). Questi sono le rappresentazioni irriducibili più piccole di $\text{Spin}(1, n-1)$, e rappresentano gli spinori di Weyl (come noto, con Γ_5 si può infatti costruire l'operatore di parità). Per avere spinori di Majorana - Weyl abbiamo bisogno di spinori di Majorana in uno spazio a dimensione pari, e quindi con $(\Gamma_5)^2 = 1$. Dopo un rapido conto, si vede che gli spinori di Majorana - Weyl appaiono solo in spazi con dimensione $2k + 8$.

Dimensione	Dirac	Majorana	Weyl	Majorana - Weyl
1	\mathbb{C}	\mathbb{R}		
2	\mathbb{C}^2	\mathbb{R}^2	\mathbb{C}	\mathbb{R}
3	\mathbb{C}^2	\mathbb{R}^2		
4	\mathbb{C}^4	\mathbb{R}^4	\mathbb{C}^2	
5	\mathbb{C}^4			
6	\mathbb{C}^8		\mathbb{C}^4	
7	\mathbb{C}^8			
8	\mathbb{C}^{16}	\mathbb{R}^{16}	\mathbb{C}^8	

Tabella 7: Rappresentazioni di Dirac, Majorana, Weyl, Majorana-Weyl.

Ora, in una teoria di gauge supersimmetrica, fermioni e bosoni hanno uno stesso numero di gradi di libertà. In uno spazio di dimensione n , i bosoni ne hanno $n - 2$ fisici (ad esempio, in 4 dimensioni i fotoni hanno due stati di polarizzazione), per cui dobbiamo cercare fermioni che ne hanno $n - 2$ anch'essi. Per l'equazione di Dirac, il numero di gradi di libertà fisici è metà del numero di componenti reali dello spinore, quindi abbiamo bisogno di spinori con $2(n - 2)$ componenti reali. Questo accade solo nei seguenti casi:

- $n = 2$: $2(n - 2) = 2$, e gli spinori di Majorana o Weyl hanno 2 componenti reali;
- $n = 4$: $2(n - 2) = 4$ e gli spinori di Majorana o Weyl hanno 4 componenti reali;

¹²È interessante vedere cosa succede quando la rappresentazione spinoriale ha la stessa dimensione di quella vettoriale, quando cioè $2/n - 1 = n$ ovvero per $n = 8$. $\text{Spin}(8)$ ha tre rappresentazioni irriducibili 8-dimensionali: vettoriale, left-handed e right-handed. Anche se non equivalenti, sono relazionate dalla cosiddetta *simmetria di triality*.

- $n = 6$: $2(n - 2) = 8$ e gli spinori di Majorana o Weyl hanno 8 componenti reali;
- $n = 10$: $2(n - 2) = 16$ e gli spinori di Majorana o Weyl hanno 16 componenti reali;

In definitiva:

- Uno spinore di Dirac è un elemento della rappresentazione fondamentale dell'algebra complessificata di $G_{m,n}$, ovvero di $\text{Spin}(m,n)$. Solo gli spinori di Dirac sono presenti in tutte le dimensioni;
- In un numero di dimensioni pari, questa rappresentazione è *riducibile* se presa come rappresentazione di $\text{Spin}(m,n)$. In tal caso otteniamo gli spinori di Weyl destro e sinistro;
- In alcune dimensioni la versione *non* complessificata di $G_{m,n}$ ha una rappresentazione reale, detta di Majorana;
- Se questo avviene in dimensioni pari, allora uno spinore di Majorana può essere decomposto in due spinori di Majorana-Weyl. Si vede allora che le dimensioni devono essere del tipo $8k + 2$;

6 Conclusioni

Negli ultimi trent'anni sono state accumulate numerose verifiche del fatto che i neutrini hanno massa, contrariamente alle assunzioni del Modello Standard. Questa sembra essere la prima violazione evidente della teoria che descrive le particelle elementari, anche perché non è possibile derivare il fenomeno dell'oscillazione di flavour da nessuna delle ipotesi di base del Modello Standard. Le misurazioni sperimentali hanno anche portato ad una verifica approfondita delle conoscenze che abbiamo sul funzionamento del Sole, dall'esito positivo. Tuttavia, non è ancora stata dimostrata la reale esistenza del fenomeno noto come doppio decadimento beta senza neutrini, che può avvenire solo se i neutrini sono di Majorana.

Le ricerche teoriche hanno rivelato un legame profondo tra il numero di dimensioni dello spazio-tempo, la massa non nulla dei neutrini e il conseguente fenomeno di oscillazione di flavour. Se i neutrini hanno massa, allora possono essere descritti con spinori Majorana. Se, inoltre, hanno anche una parità intrinseca, allora sono anche spinori di Weyl, il che, unitamente alle precedenti considerazioni, prevede che le dimensioni dello spazio-tempo siano un numero del tipo $8k + 2$, in accordo con altre previsioni provenienti dalla teoria delle stringhe.

Riferimenti bibliografici

- [1] John Bahcall, *Solar neutrinos, a popular account*, arXiv:physics/0411190v1 (19 Nov 2004)
- [2] Manfred Lindner, *The path to measuring θ_{13} , matter effects and leptonic CP violation*, Neutrino Oscillations in Venice Workshop (3-5 Dec 2003)
- [3] Maurizio Spurio, *Oscillazione dei neutrini e neutrini solari*, Dispense del corso di fisica cosmica (6 Dic 2004)
- [4] Kalus Winter, *Neutrino Physics 2nd Ed.*, Cambridge University Press (2000)
- [5] John C. Baez, *This week's finds in mathematical physics, week 61, 82, 93*, <http://math.ucr.edu/home/baez/week93.htm> (27 Oct 1996)
- [6] Anthony Lasemby, Chris Doran (Geometric Algebra Research Group - University of Cambridge), *A Lecture Course in Geometric Algebra*, <http://www.mrao.cam.ac.uk/~clifford/ptIIIcourse/course99/handouts/> (1999)

Elenco delle tabelle

1	Ciclo del protone. I neutrini hanno energie di soglia di erenti a seconda della reazione che li ha prodotti.	2
2	Flusso di neutrini non elettronici	4
3	Reazioni misurate da SNO	4
4	Algebre di Cli ord su spazi di Minkowski.	16
5	Algebre di Cli ord complessificate e Spinori di Dirac.	18
6	Rappresentazioni più piccole delle algebre di Cli ord.	18
7	Rappresentazioni di Dirac, Majorana, Weyl, Majorana-Weyl. . . .	19

Elenco delle figure

1	Flusso dei neutrini ed energie di soglia.	3
2	Neutrini misurati dai vari esperimenti. Confronto con le predizioni teoriche.	5
3	Schema del rivelatore SNO.	5
4	Probabilità di oscillazione in funzione di L, con $\theta = 45^\circ$, $\Delta m^2 = 0.003$, $E = 2GeV$	8
5	Oscillazione di flavour per $\theta = \pi/4$	9
6	Fascio di neutrini inviato dal CERN (Ginevra) verso il Laboratorio Nazionale del Gran Sasso (Abruzzo).	11